Дата: **12.01.2021**

Группа: **20-ПСО-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Первообразная. Правила нахождения первообразных (2 урока)**

1. **Определение первообразной**

Вспомним пример из механики. Если в начальный момент вре­мени скорость тела равна 0, то есть , то при свободном падении тело к моменту времени пройдет путь

Формула была найдена Галилеем экспериментально. Дифференцированием находим скорость:

Второе дифференцирование дает ускорение:

то есть ускорение постоянно.

Более типично для механики иное положение: известно уско­рение точки (в нашем случае оно постоянно), требуется найти закон изменения скорости , а также найти координату . Иными словами, по заданной производной , равной , надо найти , а затем по производной , равной , найти .

Для решения таких задач служит операция интегрирования, обратная операции дифференцирования.

*Определение. Функция называется первообразной для функции на заданном промежутке, если для всех из этого промежутка выполняется равенство*

*Пример 1*. Функция есть первообразная для функции на интервале , так как

для всех .

Легко заметить, что имеет ту же самую производную и поэтому также является первообразной для на . Ясно, что вместо числа можно поставить любую постоянную. Таким образом, мы видим, что задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений. В следующем плановом вопросе мы увидим, как найти все эти решения.

*Пример 2*. Для функции на интервале первообразной является функция

,

так как

для всех из этого интервала. Так же как и в примере 1, функция при любой постоянной есть первообразная для функции на том же интервале .

*Пример 3*. Функция не является первообразной для функции на промежутке , так как ра­венство не выполнено в точке . Однако в каждом из промежутков и функция является пер­вообразной для .

1. **Основное свойство первообразной**

*Общий вид первообразных*.

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи важную роль играет следующее утверж­дение:

*Признак постоянства функции*. *Если на некотором промежутке , то функция – постоянная на этом промежутке*.

*Доказательство*. Зафиксируем некоторое из проме­жутка . Тогда для любого числа из такого промежутка в силу формулы Лагранжа можно указать такое число , заключенное между и , что

.

По условию , так как , следовательно,

.

Итак, для всех из промежутка

,

то есть функция сохраняет постоянное значение.

Все первообразные функции можно записать с помощью од­ной формулы, которую называют *общим видом первообразных для функции* . Справедлива следующая теорема (*основное свойст­во первообразных*):

*Теорема*. *Любая первообразная для функции на проме­жутке может быть записана в виде*

*где – одна из первообразных для функции на проме­жутке , а – произвольная постоянная.*

Поясним это утверждение, в котором кратко сформулированы два свойства первообразной:

1) какое бы число ни поставить в выражение вместо , получим первообразную для на промежутке ;

2) какую бы первообразную для на промежутке ни взять, можно подобрать такое число , что для всех из проме­жутка будет выполнено равенство

.

*Доказательство*.

1) По условию функция перво­образная для на промежутке . Следовательно, для любого , поэтому

,

то есть – первообразная для функции .

2) Пусть – одна из первообразных для функции на том же промежутке , то есть

для всех . Тогда

.

Отсюда следует в силу признака постоянства функции, что раз­ность есть функция, принимающая некоторое постоян­ное значение на промежутке .

Таким образом, для всех из промежутка справедливо равенство , что и требовалось доказать.

Основному свойству первообразной можно придать геометри­ческий смысл: графики любых двух первообразных для функции получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси (рисунок 2.1, ).

*Примеры нахождения первообразных*.

*Пример* 1. Найдем общий вид первообразных для функ­ции на .

Заметим, что одной из первообразных функции является функция , так как . В силу доказанной теоремы общий вид первообразных для функции таков:

.

*Пример* 2. Найдем первообразную для функции на промежутке , принимающую при значение .

Легко проверить, что любая первообразная функции имеет вид . Так как по условию , приходим к уравнению (относительно ) вида , откуда , и, следовательно, .

*Пример 3*. Точка движется по прямой с постоянным уско­рением . В начальный момент точка имеет начальную ко­ординату и начальную скорость . Найдем координату точ­ки как функцию от времени.

Так как и , из условия a получаем . Отсюда следует, что

Подставляя в формулу , находим и

.

Следовательно,

Чтобы найти , подставим в значение , откуда .

Итак,

.

*Замечание*. Для краткости при нахождении первообраз­ной функции промежуток, на котором задана , обычно не ука­зывают. Имеются в виду промежутки возможно большей длины. Так, в следующем примере естественно считать, что функция задана на интервале .

*Пример 4*. Найдем для функции первообразную, график которой проходит через точку .

Любая первообразная функции записывается в виде . Графики этих первообразных изображены на рисун­ке 2.1 . Координаты точки графика искомой первооб­разной должны удовлетворять уравнению . Отсюда находим, что . Следовательно,

.

Ниже приводится таблица первообразных для некоторых функ­ций:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Проверьте правильность заполнения этой таблицы самостоятельно.

*Примеры:* Найти первообразную

1. , тогда
2. , тогда

1. **Три правила нахождения первообразных**

Эти правила похожи на соответствующие правила дифферен­цирования.

*Правило 1. Если есть первообразная для , a – первообразная для , то есть первообразная для* .

Действительно, так как и , по правилу вычисления производной суммы имеем:

.

*Правило 2. Если есть первообразная для , a – постоянная, то функция – первообразная для .*

Действительно, постоянный множитель можно выносить за знак производной, поэтому

.

*Правило 3*. *Если есть первообразная для , a и – постоянные, причем , то есть первообразная для* .

Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции имеем:

.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Приведем примеры применения этих правил.

*Пример 1*. Найдем общий вид первообразных для функции

.

Так как для одна из первообразных есть , а для одной из первообразных является , по правилу 1 находим: одной из первообразных для функции будет .

*Ответ:* .

*Пример 2*. Найдем одну из первообразных для функции .

Так как для одна из первообразных есть , применяя правило 2, получаем ответ:

.

*Пример 3*. Найдем одну из первообразных для функции .

Для одной из первообразных является , поэтому по правилу 3 искомая первообразная равна .

*Пример 4*. Найдем одну из первообразных для функции

.

Так как для первообразной является , по правилу 3 искомая первообразная равна

.

*Пример 5*. Материальная точка массой килограмма движется по оси под действием силы, направленной вдоль этой оси. В момент времени эта сила равна . Найдите закон движения точки, если известно, что при скорость точки равна , а координата равна ( – сила в ньютонах, – время в секундах, – путь в метрах).

Согласно второму закону Ньютона , где ускоре­ние. Имеем

.

Скорость точки есть первообразная для ее ускорения , поэтому

.

Постоянную находим из условия :

,

то есть

и

.

Координата есть первообразная для скорости , поэтому

.

Постоянную находим из условия :

.

Итак, закон движения точки:

.

№ 345 (А. Н. Колмогоров, страница 178)

Найдите для функции первообразную, график которой проходит через точку :

№ 1 1997 год 23

Укажите функцию , если и .

.

**Вопросы на закрепление темы**

1. Дайте определение первообразной.
2. Определите основное свойство первообразной.
3. Чему равна первообразная для функции ?
4. Чему равна первообразная для функции ?
5. Чему равна первообразная для функции ?
6. Чему равна первообразная для функции ?
7. Чему равна первообразная для функции ?
8. Чему равна первообразная для функции ?
9. Определите три правила нахождения первообразных.

Преподаватель Науразова Л.А