Дата: **23.12.2020**

Группа: **19-ЭК-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Практическое занятие «Исследование сходимости (расходимости) интегралов»**

Пример

Исследовать сходимость интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image185.gif

**Решение**: для удобства исследования перепишем его в виде http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image187.gif. Очевидно, что подынтегральная функция [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке интегрирования и ограничена на нём, т.к. предел http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image189.gif – равен *конечному* числу. Поэтому интеграл может как сходиться, так и расходиться.

Сравним предложенный интеграл с интеграломhttp://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image191.gif, сходимость которого выясняется в прямом смысле одной строкой:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image193.gif

Для любого http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image080_0002.gif из промежутка http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image046_0004.gif справедливо неравенство:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image196.gif, и поскольку основание функции http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image198.gif, то:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image200.gif

а дробь с большим знаменателем является меньшей:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image202.gif, таким образом, по признаку сравнения, интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image204.gif сходится вместе с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image206.gif.

**Ответ:** сходится

И здесь интересно провести дополнительное исследование: в силу [**чётности**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) подынтегральной функции, сходиться будет и интеграл  по симметричному промежутку:http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image208.gif Кроме того, *собственный* или «обычный» [**определённый интеграл**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image210.gif, разумеется, тоже сходится, т.к. равен конечному числу.

Тогда, в силу *свойства аддитивности,*сходится и интеграл:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image212.gif. И парадоксально, но факт – данный интеграл рассчитан точно: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image214.gif, невзирая на то, что соответствующий [**неопределенный интеграл**](http://mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html) [**не берётся**](http://mathprofi.ru/tablica_integralov.pdf). Да, так бывает! Это так называемый *гауссов интеграл*.

Другая вариация задания – это *уменьшение числителя*:

Пример 3

Исследовать сходимость интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image002_0000.gif

**Решение**: подынтегральная функция непрерывна и ограничена на промежутке интегрирования. Поскольку http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image004_0000.gif, то http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image006_0002.gif, и:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image008_0000.gif, значит, по признаку сравнения исследуемый интеграл сходится вместе с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image010_0000.gif.

**Ответ:** сходится

И тут возникает вопрос об интеграле http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image012_0000.gif, подынтегральная функция которого *знакопеременна*, т.е. **постоянно** [**меняет знак**](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html). Как быть в этом случае? Для таких интегралов существуют свои признаки, которые мы рассмотрим на уроке об [**условной и абсолютной сходимости интегралов**](http://mathprofi.ru/absolyutnaya_i_uslovnaya_shodimost_nesobstvennogo_integrala.html).

**Ситуация вторая:** сравнение интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image014_0000.gif с заранее известным расходящимся интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image016_0001.gif. Кратко напомню, что здесь на промежутке интегрирования должно выполняться то же неравенство http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image018_0000.gif. Как и в предыдущей ситуации, анализировать можно знаменатель или числитель:

Пример 4

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image020_0002.gif, б) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image022_0000.gif

Так, например, интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image024_0000.gif терпит [**бесконечный разрыв**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) в точке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image026.gif, и для его исследования используются другие методы (о которых позже). **Далее проверяем ограниченность функции на данном промежутке**, аналитически она устанавливается *конечным* пределом *http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image028_0003.gifподынтегральной функции*

**Решение**

а) Множитель-константа не влияет на сходимость или расходимость, поэтому его можно сразу вынести за пределы интеграла:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image030_0000.gif

Для каждого http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image032_0000.gif промежутка http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image034_0000.gif справедливо неравенство:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image036_0000.gif *(т.к. «икс» более высокого порядка роста, чем натуральный логарифм)*,

а меньшим знаменателям соответствуют большие дроби:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image038_0000.gif, значит, по признаку сравнения исследуемый интеграл **расходится** вместе с «эталонным» интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image040_0000.gif.

б) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image022_0001.gif Здесь напрашивается сравнение с расходящимся интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image043.gif, но не всё так просто. Во-первых, при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image045.gif натуральный [**логарифм**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) отрицателен *(смотрим график!!)*. И, во-вторых, на участке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image047.gif этот логарифм **меньше** единицы, а значит, желаемое неравенство не является справедливым: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image049.jpg.

Что делать? Решение можно оформить двумя способами. Первый способ академичный. Согласно *свойству аддитивности*, делим интеграл на 3 части:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image051.gif

Первый и второй интегралы *сходятся*, т.к. являются [**определёнными интегралами**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html). Для всех же значений http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image053_0000.gif справедливо неравенство:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image055_0000.gif, значит, интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image057_0001.gif расходится вместе с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image059_0000.gif,

а значит, **расходится** и весь интеграл интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image061_0000.gif.

В укороченном способе оформления можно ограничиться такой фразой:

– при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image063_0000.gif справедливо неравенство http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image055_0001.gif – и тот же самый вывод.

Таким образом, **сходимость или расходимость несобственного интеграла 1-го рода зависит от «поведения» его бесконечного предела.**

Тренируемся самостоятельно:

Пример 5

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image065_0000.gif, б) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image067.gif, в) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image069.gif, г) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image071.gif, д) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image073.gif

Пример 6

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image075.gif, б) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image077.gif

**Решение**:

а) По «общим очертаниям» интеграл напоминает сходящийся «эталон» http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image079.gif, но как провести сравнение? Шаблон *Примера 3* *(интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image002_0001.gif)* не годится, так как на промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image081.gif аналогичное неравенство является неверным:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image083.jpg

Но мы его всё равно организуем: при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image063_0001.gif степенная функция http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image086_0002.gif, и в частности корень http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image088.gif для любого http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image090_0000.gif – [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image092.gif.  
Следовательно:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image094.gif

Отмечу одну тонкость: если неравенство http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image096_0000.gif выполнено вообще для всех положительных «икс», то для более «мелких» корней, например http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image098.gif, это утверждение неверно. Так, неравенство http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image100.gif начинает выполняться лишь примерно с http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image102.gif, и поэтому при использовании таких корней **нельзя применять формулировку** «на всём промежутке интегрирования». Следует сказать уклончиво: «при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image104.gif, по умолчанию подразумевая, что «начало» интеграла *(где неравенство не выполнено)* – тоже сходится.

Однако возвращаемся к задаче. В силу установленного неравенства возникает вопрос сходимости интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image106.gif и тут возникает вторая загвоздка: поскольку http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image108.gif, то нужное нам неравенство опять не выполняется:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image110.jpg

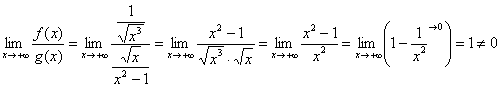
**Предельный признак сравнения**: пусть те же [**неотрицательные**](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) функции http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image112_0000.gif [**непрерывны**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image114_0000.gif и существует *конечный* предел их отношения http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image116_0000.gif

*отличный* от нуля. Тогда интегралы http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image016_0002.gif **(1)** и http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image014_0001.gif **(2)** сходятся или расходятся одновременно. Кроме того, при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image120.gif из сходимости интеграла (2) следует сходимость интеграла (1), а при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image122.gif из расходимости того же интеграла (2) следует расходимость интеграла (1).

Но последняя часть признака применяется редко, гораздо чаще подбирают такой интеграл, чтобы получился конечный предел.

Итак, исследуем сходимость интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image106_0000.gif. **Вопрос:** с каким интегралом его нужно сравнить, чтобы в результате получился пределhttp://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image125_0000.gif?

Нечто подобное мы уже проделывали при [**вычислении пределов функций**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html). Смотрим на знаменатель http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image127_0000.gif нашей функции и МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image129_0000.gif – таким образом, старшая степень знаменателя равна 2. Поскольку в числителе находится только http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image131_0000.gif, то старшая степень числителя равна http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image133_0000.gif. Теперь находим разность старших степеней: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image135_0000.gif *(строго такую, не наоборот!)*, и в результате приходим к выводу, что наш интеграл следует сравнить с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image137_0000.gif, который сходится.

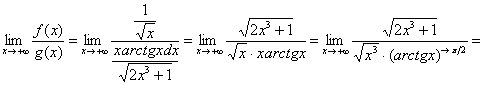
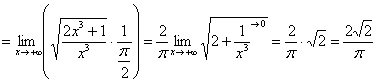
Составляем [**предел**](http://mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html), [**избавляемся от четырёхэтажности дроби**](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) и получаем:  
 – конечное число, значит, по предельному признаку сравнения, интеграл  http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image106_0001.gif сходится вместе с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image141_0000.gif.

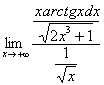
И в силу установленного выше неравенства  http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image094_0000.gif, исследуемый интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image075_0000.gif **сходится**вместе с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image106_0002.gif.

Таким образом, у нас получилась двухшаговое исследование, в котором мы использовали оба признака сравнения.

б) Интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image143_0000.gif. Проведём предварительный анализ: на промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image145_0000.gif [**арктангенс**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) ограничен: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image147_0000.gif, но эта информация помогает мало, т.к. на обоих этажах есть и другие одно- и многочлены с «иксами». **И это типичная ситуация, в которой хорошо срабатывает предельный признак сравнения!** Используем ту же методику: МЫСЛЕННО отбрасываем под корнем все младшие члены а также множитель-константу *(двойку)* при самой высокой степени: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image149_0000.gif, значит, старшая степень знаменателя равна http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image151_0000.gif. В числителе находится http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image153_0000.gif и поэтому старшая степень числителя равна 1.

Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image155_0000.gif, таким образом, наш интеграл следует сравнить с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image157_0000.gif, который расходится. Возможно, у некоторых возник вопрос: а что делать, если разность степеней получилась отрицательной? Это означает, что числитель [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем знаменатель и интеграл расходится – вычисляем предел http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image159_0000.gif.

Но в предельном признаке сравнения нас ожидает более занятный предел:  
  
 – конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый интеграл **расходится** вместе с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image165_0000.gif.

Следует отметить, что при использовании предельного признака отношение функций можно составлять и наоборот, так, в только что разобранном примере можно составить предел , получить http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image169_0000.gif и прийти к тому же содержательному выводу.

**Самостоятельно решить:**

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image171_0000.gif, б) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image173_0000.gif

Преподаватель Науразова Л.А.