Дата: **25.12.2020**

Группа: **19-ЭК-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.**

**Задача 1.** Найти закон движения свободно падающего в пусто-

те тела, если пройденный путь начинает отсчитываться от момента времени t = 0 и начальная скорость падения равна нулю. Скорость в этом случае выражается, как известно, формулой 

**Решение.**

 Скорость переменного движения есть производная по времени. Поэтому  =gt (1.1)

Из этого уравнения следует, что функция s есть первообразная функции gt. Следовательно,  или  (1.2)

 Для определения произвольной постоянной С используем то условие, что начало отсчёта пути совпадает с началом отсчёта времени, то есть при t = 0 s = 0. Подставляя эти значения в равенство (1.2), находим 0 = 0+С, то есть С = 0, и следовательно, окончательно получаем .

**Задача 2.** **(Об охлаждении тела).** Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 200С. Известно, что в течение 20 минут тело охлаждается от 100 до 600С. Определить закон изменения температуры  тела в зависимости от времени t.

**Решение.**

 Согласно условию задачи имеем  или

  (1.3)

где k>0 – коэффициент пропорциональности и x =  - 20.

 Разделяя в уравнении (1.3) переменные и затем, интегрируя, получаем 

 ,

что после потенцирования даёт .

 Для определения С используем начальное условие x = 80 при

t =0:

 

Следовательно,  или откуда 

 Коэффициент пропорциональности k определяем из дополни - тельного условия: при t = 20,  = 60. Отсюда 60=20+80 или

 = и, следовательно, .

Итак, искомая функция .

 **Задача 3. (О движении моторной лодки).** Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью . На полном ходу её мотор выключается и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до  Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

 Определить скорость движения лодки через 2 мин. после остановки мотора.

**Решение.**

 На движущуюся лодку действует сила сопротивления воды

 ,

где >0 – коэффициент пропорциональности.

С другой стороны по второму закону Ньютона 

и, значит,  или .

Решим это дифференциальное уравнение, разделяя переменные и интегрируя, получим:

 

После потенцирования получаем:

 

Найдём С, используя начальное условие  при t = 0:

 

Поэтому .

Теперь, используя дополнительное условие – при t = 40c =   - получаем  или 

Следовательно, .

Отсюда искомая скорость равна:



**Задача 4. (О потере заряда проводником).** Изолированному проводнику сообщим заряд  Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент времени пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени t = 10 мин., если за первую минуту потеряно 100 *Кл*?

**Решение.**

 Пусть в момент времени t заряд проводника равен . Тогда скорость потери заряда в этот момент времени равна - . По условию задачи  или ,

где >0 – коэффициент пропорциональности.

Решим последнее уравнение – это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

 

Потенцируя, последнее уравнение получим:

 

Используя начальное условие  при t = 0, найдём С:

 

Следовательно, 

Далее, используя дополнительное условие – при t = 1 мин. , имеем , 

 Поэтому 

Следовательно, через 10 минут на проводнике останется заряд

 

**Задача 5. (Заряд конденсатора).** Конденсатор ёмкостью С включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд конденсатора в момент времени t после включения.

**Решение.**

Сила I электрического тока представляет собой производную от количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t  В момент t заряд конденсатора q и сила тока  в цепи действует электродвижущая сила Е, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора  то есть 

Согласно закону Ома 

Поэтому 

Отсюда 

или  ,

то есть, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Решим его:

 

 

 

 используя начальное условие x = СU при t=0, получим:  или 

Откуда 

**Задача 6. (Падение с парашютом).** Составить закон движения парашютиста, масса тела которого равна m.

**Решение.**

 При падении тел в безвоздушном пространстве их скорость равномерно увеличивается. Иначе обстоит дело, если падение происходит в воздухе. Будем для простоты считать, что сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости падения. Сила F, действующая на тело массы m, равна (знак минус перед поставлен потому, что сила сопротивления воздуха направлена в сторону, противоположную направлению падения). Далее, так как по второму закону Ньютона , где  - ускорение, получаем уравнение:

 

или

 

с начальным условием  при t = 0. Отсюда, вводя обозначе- ние , получаем  с начальным условием  при t = 0, то есть имеем уравнение с разделяющимися переменными и начальным условием  при t = 0.

Значит  или  откуда 

 По прошествии некоторого времени  станет очень малым числом и скорость падения будет почти в точности равна , то есть падение станет равномерным.

Теперь найдём закон движения парашютиста s = s(t). Для этого перепишем найденное выражение для скорости  в виде

  ,

откуда

 

что после интегрирования 

где С – производная постоянная. Для отыскания С заметим, что при t = 0 пройденный путь равен нулю, то есть при t = 0 имеем

S = 0.

 Подставляя эти значения в последнее равенство, получаем

, т.е. . Итак, закон движения парашютиста имеет вид 

**Задача №7 (О прожекторе).** Определить форму зеркала, обладающего тем свойством, чтобы все лучи, исходящие из источника света, помещённого в точке О на оси вращения, отражались бы зеркалом параллельно этой оси.

**Решение.**

Для решения задачи будем рассматривать плоское сечение зеркала, проходящее через ось вращения. Поместим источник света в начале координат, и пусть ось вращения совпадает с осью Ох (см. рис. 1). Обозначим через  угол, образованный осью Ох и касательной AS в произвольной точке сечения М (х; у).

x

y

M

O

A

P

x

N

T





Рис.1.

Рис.2.

-



О

y y

Наша цель найти форму сечения, то есть зависимость координаты у от координаты х: у=у(х). Ломанная ОМТ изображает путь луча, исходящего из источника света в точке О и отражающегося в точке М от поверхности зеркала параллельно оси Ох. Проведём нормаль МN и опустим из точки М на ось Ох перпендикуляр МР. Так как (угол падения равен углу отражения), имеем .

Следовательно, NOM – равнобедренный и поэтому ОМ = ОN. Кроме этого, по построению . Можно переходить к составлению дифференциального уравнения:

ОN = РN – PO, PN= ytg, PO = -x, ON=OM=,

ON = ytg + x =.

Учитывая геометрический смысл производной: , получаем для определения зависимости у от х дифференциальное уравнение первого порядка

 .

Для нахождения решения уравнения преобразуем его следующим образом. Умножаем обе части равенства на 2dx:

 или 

Подстановкой  приводим уравнение к уравнению с разделяющимися переменными .

которое преобразуется к виду 

Отсюда находим .

Заменяя переменную z её выражением через х и у, получаем

 

Упрощая полученное уравнение возведением в квадрат обеих его частей, получаем 

Таким образом, искомая кривая – парабола с параметром р = С и вершиной, лежащей на расстоянии  влево от начала координат (см. рис. 2). Следовательно, искомая отражательная поверхность – параболоид вращения.

**Домашняя работа**

**Задача №1.**

Скорость v, путь s и время t связаны уравнением . Найти закон движения, если при t = 0 s = 2.

**Задача2.**

В помещении для крупного рогатого скота работают 2 вентилятора, каждый из которых в минуту доставляет по 60м3 чистого воздуха, содержащего 0,01% углекислоты. Полагая, что в коровнике объёмом 1600м3 с начальным содержанием углекислоты в 0,2% находится 120 коров, каждая из которых выдыхает в минуту 0,1м3 воздуха с 5% углекислоты, определить наличие углекислоты в 1м3 воздуха после двухчасового содержания животных в помещении.

Преподаватель Науразова Л.А