Дата: 09.12.2020г

Группа: 20- ЭК-1дк

Наименование дисциплины: Математика

Тема: Понятие о пределе последовательности.

Занумерованный ряд чисел а1, а2,…, аn,…называется **числовой последовательность.**

Числовая последовательность называется **возрастающей**, если каждый ее член больше предыдущего, иными словами, если для всякого  верно неравенство  .(аналогично дается определение убывающей числовой последовательности)

Последовательность называется **монотонной**, если она является либо возрастающей, либо убывающей.

Последовательность а1, а2,…,аn .. называется **ограниченной**, если для ее членов можно указать общую границу, т.е. если существует такое число С, что неравенство  выполняется для всех номеров n.

Последовательность ограничена снизу, если существует число *m*такое, что для любого *n* выполняется неравенство . Число *m* называют **нижней границей последовательности**.

Число b называется **пределом последовательности** , если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

При вычислении пределов зачастую появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределённостями.**

Пусть каждому натуральному числу поставлено в соответствие действительное число: числу 1 соответствует число а, числу 2 – а2, …, числу n – число аn и т.д. Тогда говорят, что задана числовая последовательность, и пишут а1, а2,…,аn или (аn), где а1, а2,…,аn – члены последовательности.

Занумерованный ряд чисел а1, а2,…, аn,…называется числовой последовательность.

**Способы задания последовательностей.**

Наиболее простой способ задания последовательности – это ее задание с помощью *формулы общего члена*, т.е. формулы, явно выражающей зависимость *n*-го члена последовательности от *n*.

Например, формула *аn=2n*задает последовательность четных чисел *2,4,6,8,…* .

Другим важным способом задания последовательности является *рекуррентный*способ, при котором задается выражение, связывающее *n-й*член последовательности с одним или несколькими предыдущими.

Слово *рекуррентный*происходит от латинского слова *recurrens,* что означает «возврат». Вычисляя новый, очередной член последовательности, мы как бы возвращаемся назад и используем уже вычисленные предыдущие члены.

Например, рекуррентное соотношение *an=an-1+2*вместе с уравнением *a1=1* задает арифметическую прогрессию с первым членом 1 и разностью *2:1, 3, 5, 7,..*. Это не что иное, как последовательность нечетных чисел.

Так же последовательность может быть задана *словесным описанием*, в котором определяется процесс построения членов последовательности.

**Свойства числовой последовательности.**

Числовая последовательность называется возрастающей, если каждый ее член больше предыдущего, иными словами, если для всякого  верно неравенство  .(аналогично дается определение убывающей числовой последовательности)

Например *1, 3, 5, 7 2n -1,...* — возрастающая последовательность.

Например  — убывающая последовательность.

Последовательность называется монотонной, если она является либо возрастающей, либо убывающей.

Последовательность а1, а2,…,аn .. называется ограниченной, если для ее членов можно указать общую границу, т.е. если существует такое число С, что неравенство  выполняется для всех номеров n.

Иными словами, последовательность *(yn)* ограничена сверху, если существует число *М* такое, что для любого n выполняется неравенство

 Число *М* называют верхней границей последовательности.

Например, последовательность-1, -4, -9, -16,..., —*п*2 , ... ограничена сверху. В качестве верхней границы можно взять число -1 или любое число, которое больше, чем -1, например 0.

Последовательность *(уn)* ограничена снизу, если существует число *m*такое, что для любого *n* выполняется неравенство *.*Число *m* называют нижней границей последовательности.

Например, последовательность 1, 4, 9, 16, ..., *п*2, ... ограничена снизу. В качестве нижней границы можно взять число 1 или любое число меньше 1.

Определение предела последовательности

Рассмотрим две числовые последовательности *(уп)* и *(хп)*.

*(уn):*1,3, 5,7,9, ...,2*n-1*,...; *(xn):*

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой (рис. 1 для *(уп)* и рис. 2 для (*хп*)). Замечаем, что члены второй последовательности *(хn)* как бы « сгущаются» около точки 0, а у первой последовательности *(уп)* такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность (хn) сходится, а последовательность *(уп)* расходится.

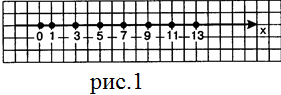


Рисунок 1

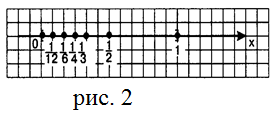


Рисунок 2

Возникает естественный вопрос: как узнать, является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности. Чтобы ответить на данный вопрос, введем новый математический термин.

Пусть а — точка прямой, а r — положительное число. Интервал (а - r, а + r) называют окрестностью точки а (рис. 3), а число r— радиусом окрестности*.*

Какова окрестность точки 6, если радиус этой окрестности равен 0,02? Ответ: (5,98; 6,02), так как 6-0,02˂ 6 ˂ 6+0,02

*a-r ˂ a ˂ a+r*

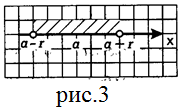


Рисунок 3

Теперь мы можем ответить на поставленный выше вопрос. Но термин «точка сгущения для членов заданной последовательности» обычно заменяют термином «предел последовательности».

Число b называется пределом последовательности (yn), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут либо так: (читают: уп стремится к b или уп сходится к b), либо так:



(читают: предел последовательности уnпри стремлении n к бесконечности равен b; но обычно слова «при стремлении n к бесконечности» опускают).

Правила вычисления пределов последовательности

**Пример 1***: Дана последовательность*

*- Как вы считаете, чему равен предел данной последовательности?*

*Докажем, что*

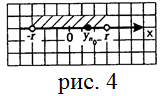


Рисунок 4

Возьмем любую окрестность точки 0, пусть ее радиус равен r (Рис.4). Ясно, что всегда можно подобрать натуральное число n0 так, чтобы выполнялось неравенство  . Если, например r=0.001,то в качестве n0 можно взять 1001, поскольку ; если , то в качестве n0 можно взять 5774, поскольку , и т.д. Но это значит, что член последовательности yn с номером n0 , т.е.  , попадает в выбранную окрестность точки 0. Тем более в этой окрестности будут находится все последующие члены заданной убывающей последовательности .



**Пример 2:** Найти предел последовательности 

Здесь последовательность сходится к 0:  или



Результат, полученный в примере 2, является частным случаем общего утверждения: если 



А что будет с последовательностью **, если**? Пусть, например, q=2, т.е. речь идет о последовательности 2,22,23,…,2n,… Эта последовательность явно не имеет предела (нет «точки сгущения»). Вообще, справедливо утверждение: если , то последовательность расходится.



Например:





**Правила вычисления пределов:**

если











**Виды неопределенностей.**

Но при вычислении пределов зачастую появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределённостями.**



**Основные виды неопределенностей:**



**Раскрытие неопределенностей**

Для раскрытия неопределенностей используют следующее:

* упрощают выражение функции: раскладывают на множители, преобразовывают функцию с помощью формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножают на сопряженное, что позволяет в дальнейшем сократить и т.д., и т.п.;
* если предел при раскрытии неопределенностей существует, то говорят, что функция сходится к указанному значению, если такого предела не существует, то говорят, что функция расходится.

**Разбор решения заданий тренировочного модуля**

**Пример 1.**

Вычислите предел и выберите верный ответ из представленных:



1. 0,8
2. 0,5
3. -2
4. 1

**Решение:**

При прямой подстановке, получается неопределенность:



Разложим на множители числитель и знаменатель и вычислим предел:



Ответ:

1. 0,8
2. 0,5
3. -2
4. 1

1.Что называется числовой последовательностью?

2. Какая последовательность называется монотонной?

3.Какие выражения называют неопределённостями**?**

4. Виды неопределенностей.

Преподаватель М.У.Чупанова