Дата: **21.12.2020**

Группа: **19-ЭК-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Практическое занятие «Исследование сходимости (расходимости) интегралов» (2 урока)**

Напомним основные типы несобственных интегралов:
 – *несобственные интегралы 1-го рода*;

 – *несобственные интегралы 2-го рода*, в которых функция  терпит [**бесконечный разрыв**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) в точке  и / или  или в промежуточных точках отрезка .

Предположим, что нам дан произвольный несобственный интеграл. **В чём состоит сегодняшняя задача?** Задача состоит в том, чтобы выяснить, сходится ли (в принципе) данный интеграл или нет.

**Зачем это нужно?** Ну, во-первых, иногда бывает полезно сразу выяснить это вопрос. Во-вторых, рассмотрим, например, такие несобственные интегралы:


Здесь соответствующие [**неопределенные интегралы**](http://mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html) являются *неберущимися*, и поэтому решить данные примеры [**обычным способом**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html) невозможно. Но можно выяснить, сходятся ли эти интегралы или расходятся.

Вопрос третий: **как определить, сходится ли несобственный интеграл или нет?**

Начнём с [**несобственных интегралов 1-го рода**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html), и сразу **очевидный признак:**

Если подынтегральная функция [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке  и *не ограничена* сверху и/или снизу при , то несобственный интеграл  расходится.

Пожалуйста: . Вспоминаем «школьный» [**график прямой пропорциональности**](http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) .

При  этот график  уходит вверх на плюс бесконечность, и совершенно понятно, что площадь под ним *(серая штриховка)* бесконечна: .

То же самое справедливо и для «страшных» интегралов наподобие , которые на самом деле ничуть не страшнЫ. Во-первых, отмечаем [**непрерывность**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) подынтегральной функции на промежутке интегрирования, и, во-вторых, выясняем [**порядок роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html) числителя и знаменателя – этим мы уже занимались, когда находили [**пределы функций**](http://mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html). В числителе МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые под корнем:  и константу-множитель: , следовательно, старшая степень числителя равна ! В знаменателе тоже отбрасываем все младшие слагаемые: , следовательно, старшая степень знаменателя равна 2.

Неравенство  говорит нам о том,  что числитель [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем знаменатель, а значит, . То есть, при  подынтегральная функция не ограничена сверху и площадь под графиком данной функции на промежутке  – бесконечна: .

Актуализируем ещё пару важных фактов о порядке роста. Рассмотрим следующие несобственные интегралы от непрерывных на промежутке интегрирования функций:


При  показательная функция  с основанием  [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем любая степенная функция . Поэтому  и соответствующий несобственный интеграл  – расходится. Подчёркиваю, что в знаменателе может стоять «икс» хоть в сотой, хоть в тысячной степени, суммы степенных функций – результат от этого не изменится: . В справедливости предела  можно убедиться, применив [**правило Лопиталя**](http://mathprofi.ru/pravila_lopitalya.html) :)

Второе. При  степенная функция  – [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем натуральный логарифм, таким образом, функция  (не ограничена сверху) и соответствующий несобственный интеграл расходится: .

Возьмите на заметку эту информацию, она нам потребуется в будущем, в том числе самом близком.

Как ведёт себя интеграл, если подынтегральная функция *ограничена*? На всякий случай приведу яркие примеры ограниченных функций, вдруг у кого недопонимание этого термина: [**экспонента**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)  – ограничена осью абсцисс снизу; [**синус**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html):  , [**арктангенс**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html):  – ограничены и сверху, и снизу.

**Если функция ограничена** сверху и/или снизу **на некотором промежутке, то мы ничего не можем сказать о сходимости интеграла на данном промежутке** – он может, как сходиться, так и расходиться.

**Признак сравнения:** пусть две [***неотрицательные***](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) функции  [**непрерывны**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке , и для всех  этого промежутка справедливо неравенство . Тогда из сходимости интеграла  следует сходимость интеграла , а из расходимости  следует расходимость интеграла .

1) Пусть несобственный интеграл  сходится. Тогда площадь, заштрихованная на чертеже серым цветом, будет *конечна*.  В силу условия  график функции  *(красная линия)*расположен *не выше* графика  и  интегралу  соответствует «красная» площадь, которая является ЧАСТЬЮ *конечной* «серой» площади. Следовательно, «красная» площадь тоже конечна, то есть несобственный интеграл  – сходится:

2) Ситуация вторая: пусть на том же промежутке  интеграл  расходится. Это означает, что «красная» площадь *бесконечна*. А коль скоро, она является частью «серой» площади, то интегралу  ничего не остаётся делать, как тоже расходиться.

Такой же признак можно сформулировать для интегралов   и, кроме того, для [***неположительных***](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) функций, удовлетворяющих условию , чертёж в последнем случае [**отобразится в нижнюю полуплоскость, симметрично относительно оси**](http://mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii.html#6) . Признаки сравнения для этих случаев сформулируйте и осознайте самостоятельно. На практике такие примеры встречаются, и они не должны поставить вас в тупик!

Но в первую очередь, конечно, традиционные примеры:

В начале вводного урока о [**несобственных интегралах**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html) мы установили сходимость интеграла . Теперь поставим задачу исследовать сходимость интеграла .

Подчёркиваю, что **решать его не нужно** *(хотя делается это легко)* – а нужно выяснить, сходится ли он (в принципе)  или нет.
Прежде всего, обратим внимание, что функция  непрерывна и *ограничена* на промежутке , все её значения «сидят» в полуинтервале . Но, как отмечалось выше, пробуем использовать признак сравнения. Сравнивать будем с интегралом , сходимость которого уже установлена.

На промежутке  функции   непрерывны.

Строго положительны: . Очень хорошо – условия признака выполнены, и поэтому можно приступать к анализу самих функций.

Для ВСЕХ  из данного промежутка справедливо очевидное неравенство:


а большим знаменателям соответствуют меньшие дроби:


**В случае сомнений всегда можно взять несколько значений «икс»** *(проще всего целых)* **и расписать несколько неравенств подробно**, чтобы убедиться в своей правоте или неправоте. В нашем случае:

если , то ;
если , то ;
если , то ;
Если , то ;
….
и теперь-то уж совершенно понятно, что для всех  из промежутка  неравенство  действительно справедливо.

Таким образом, по признаку сравнения интеграл  сходится *(равен конечному числу)* вместе с интегралом . Кстати, на чертеже выше изображен именно графики функций .

С помощью признака сравнения легко установить, что интеграл вида  сходится при   и расходится, если , а при  он будет очевидно расходящимся.

Так, например, интегралы  – сходятся, а  – расходятся

Это семейство «эталонных» интегралов активно используется в практических заданиях, причём, опционально нижний предел интегрирования может быть и другим, например:  – зависит от того, какой интеграл предложен для исследования.

Пример 1

Исследовать сходимость интеграла 

**Решение:** данный [**биномиальный интеграл**](http://mathprofi.ru/integrirovanie_kornei.html) является *неберущимся*, но есть возможность выяснить, сходится он или нет. Во-первых, отмечаем, что подынтегральная функция [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке  и ограничена на нём, ибо предел ** – равен *конечному* числу *(в общем случае не обязательно нулю)*. Таким образом, отделаться «малой кровью» у нас не получилось и решение продолжается.

По «общим очертаниям» предложенный  интеграл напоминает сходящийся «эталон» . На промежутке :

, , а вот дела с дробями обстоят ровно наоборот – по той причине, что дробь с большим знаменателем является меньшей:

, таким образом, по признаку сравнения исследуемый интеграл сходится вместе с интегралом .

**Ответ:** сходится

Подобных примеров можно придумать очень много:  – сравниваем с соответствующими сходящимися интегралами .

 Как вариант, знаменатель может быть «утяжелён» какой-нибудь возрастающей функцией – «иксом» в положительной степени, логарифмом, экспонентой:  и т.д.

Все эти интегралы исследуются по той же схеме, единственное, здесь появляется дополнительная строчка в решении. Так, например, если в разобранном примере:
, то, домножая левую часть на , мы *только её увеличим*, и поэтому неравенство:
 будет выполнено.

Следовательно:
, и по признаку сравнения, интеграл   тоже сходится.

Пример 2

Исследовать сходимость интеграла 

**Решение**: для удобства исследования перепишем его в виде . Очевидно, что подынтегральная функция [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке интегрирования и ограничена на нём, т.к. предел  – равен *конечному* числу. Поэтому интеграл может как сходиться, так и расходиться.

Сравним предложенный интеграл с интегралом, сходимость которого выясняется в прямом смысле одной строкой:


Для любого  из промежутка  справедливо неравенство:
, и поскольку основание функции , то:


а дробь с большим знаменателем является меньшей:
, таким образом, по признаку сравнения, интеграл  сходится вместе с интегралом .

**Ответ:** сходится

И здесь интересно провести дополнительное исследование: в силу [**чётности**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) подынтегральной функции, сходиться будет и интеграл  по симметричному промежутку: Кроме того, *собственный* или «обычный» [**определённый интеграл**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html) , разумеется, тоже сходится, т.к. равен конечному числу.

Тогда, в силу *свойства аддитивности,*сходится и интеграл:
. И парадоксально, но факт – данный интеграл рассчитан точно: , невзирая на то, что соответствующий [**неопределенный интеграл**](http://mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html) [**не берётся**](http://mathprofi.ru/tablica_integralov.pdf). Да, так бывает! Это так называемый *гауссов интеграл*.

Другая вариация задания – это *уменьшение числителя*:

Пример 3

Исследовать сходимость интеграла 

**Решение**: подынтегральная функция непрерывна и ограничена на промежутке интегрирования. Поскольку , то , и:
, значит, по признаку сравнения исследуемый интеграл сходится вместе с интегралом .

**Ответ:** сходится

И тут возникает вопрос об интеграле , подынтегральная функция которого *знакопеременна*, т.е. **постоянно** [**меняет знак**](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html). Как быть в этом случае? Для таких интегралов существуют свои признаки, которые мы рассмотрим на уроке об [**условной и абсолютной сходимости интегралов**](http://mathprofi.ru/absolyutnaya_i_uslovnaya_shodimost_nesobstvennogo_integrala.html).

**Ситуация вторая:** сравнение интеграла  с заранее известным расходящимся интегралом . Кратко напомню, что здесь на промежутке интегрирования должно выполняться то же неравенство . Как и в предыдущей ситуации, анализировать можно знаменатель или числитель:

Пример 4

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) , б) 

Так, например, интеграл  терпит [**бесконечный разрыв**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) в точке , и для его исследования используются другие методы (о которых позже). **Далее проверяем ограниченность функции на данном промежутке**, аналитически она устанавливается *конечным* пределом *подынтегральной функции*

**Решение**

а) Множитель-константа не влияет на сходимость или расходимость, поэтому его можно сразу вынести за пределы интеграла:


Для каждого  промежутка  справедливо неравенство:
 *(т.к. «икс» более высокого порядка роста, чем натуральный логарифм)*,

а меньшим знаменателям соответствуют большие дроби:
, значит, по признаку сравнения исследуемый интеграл **расходится** вместе с «эталонным» интегралом .

б)  Здесь напрашивается сравнение с расходящимся интегралом , но не всё так просто. Во-первых, при  натуральный [**логарифм**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) отрицателен *(смотрим график!!)*. И, во-вторых, на участке  этот логарифм **меньше** единицы, а значит, желаемое неравенство не является справедливым: .

Что делать? Решение можно оформить двумя способами. Первый способ академичный. Согласно *свойству аддитивности*, делим интеграл на 3 части:


Первый и второй интегралы *сходятся*, т.к. являются [**определёнными интегралами**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html). Для всех же значений  справедливо неравенство:
, значит, интеграл  расходится вместе с интегралом ,

а значит, **расходится** и весь интеграл интеграл .

В укороченном способе оформления можно ограничиться такой фразой:

– при  справедливо неравенство  – и тот же самый вывод.

Таким образом, **сходимость или расходимость несобственного интеграла 1-го рода зависит от «поведения» его бесконечного предела.**

Тренируемся самостоятельно:

Пример 5

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) , б) , в) , г) , д) 

Пример 6

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) , б) 

**Решение**:

а) По «общим очертаниям» интеграл напоминает сходящийся «эталон» , но как провести сравнение? Шаблон *Примера 3* *(интеграл )* не годится, так как на промежутке  аналогичное неравенство является неверным:


Но мы его всё равно организуем: при  степенная функция , и в частности корень  для любого  – [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем .
Следовательно:


Отмечу одну тонкость: если неравенство  выполнено вообще для всех положительных «икс», то для более «мелких» корней, например , это утверждение неверно. Так, неравенство  начинает выполняться лишь примерно с , и поэтому при использовании таких корней **нельзя применять формулировку** «на всём промежутке интегрирования». Следует сказать уклончиво: «при , по умолчанию подразумевая, что «начало» интеграла *(где неравенство не выполнено)* – тоже сходится.

Однако возвращаемся к задаче. В силу установленного неравенства возникает вопрос сходимости интеграла  и тут возникает вторая загвоздка: поскольку , то нужное нам неравенство опять не выполняется:


**Предельный признак сравнения**: пусть те же [**неотрицательные**](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) функции  [**непрерывны**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке  и существует *конечный* предел их отношения 

*отличный* от нуля. Тогда интегралы  **(1)** и  **(2)** сходятся или расходятся одновременно. Кроме того, при  из сходимости интеграла (2) следует сходимость интеграла (1), а при  из расходимости того же интеграла (2) следует расходимость интеграла (1).

Но последняя часть признака применяется редко, гораздо чаще подбирают такой интеграл, чтобы получился конечный предел.

Итак, исследуем сходимость интеграла . **Вопрос:** с каким интегралом его нужно сравнить, чтобы в результате получился предел?

Нечто подобное мы уже проделывали при [**вычислении пределов функций**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html). Смотрим на знаменатель  нашей функции и МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые:  – таким образом, старшая степень знаменателя равна 2. Поскольку в числителе находится только , то старшая степень числителя равна . Теперь находим разность старших степеней:  *(строго такую, не наоборот!)*, и в результате приходим к выводу, что наш интеграл следует сравнить с интегралом , который сходится.

Составляем [**предел**](http://mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html), [**избавляемся от четырёхэтажности дроби**](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) и получаем:
 – конечное число, значит, по предельному признаку сравнения, интеграл   сходится вместе с интегралом .

И в силу установленного выше неравенства  , исследуемый интеграл  **сходится**вместе с интегралом .

Таким образом, у нас получилась двухшаговое исследование, в котором мы использовали оба признака сравнения.

б) Интеграл . Проведём предварительный анализ: на промежутке  [**арктангенс**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) ограничен: , но эта информация помогает мало, т.к. на обоих этажах есть и другие одно- и многочлены с «иксами». **И это типичная ситуация, в которой хорошо срабатывает предельный признак сравнения!** Используем ту же методику: МЫСЛЕННО отбрасываем под корнем все младшие члены а также множитель-константу *(двойку)* при самой высокой степени: , значит, старшая степень знаменателя равна . В числителе находится  и поэтому старшая степень числителя равна 1.

Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя:
, таким образом, наш интеграл следует сравнить с интегралом , который расходится. Возможно, у некоторых возник вопрос: а что делать, если разность степеней получилась отрицательной? Это означает, что числитель [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем знаменатель и интеграл расходится – вычисляем предел .

Но в предельном признаке сравнения нас ожидает более занятный предел:

 – конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый интеграл **расходится** вместе с интегралом .

Следует отметить, что при использовании предельного признака отношение функций можно составлять и наоборот, так, в только что разобранном примере можно составить предел , получить  и прийти к тому же содержательному выводу.

**Самостоятельно решить:**

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) , б) 

Преподаватель Науразова Л.А