Дата: **23.12.2020**

Группа: **20-ПСО-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Приложение дифференциала к приближенным вычислениям**

На данном уроке мы рассмотрим широко распространенную задачу **о** приближенном вычислении значения функции с помощью дифференциала. Здесь и далее речь пойдёт о дифференциалах первого порядка, для краткости я часто буду говорить просто «дифференциал». Задача о приближенных вычислениях с помощью дифференциала обладает жёстким алгоритмом решения, и, следовательно, особых трудностей возникнуть не должно.

Приближенные вычисления  
с помощью дифференциала функции одной переменной

Рассматриваемое задание и его геометрический смысл уже освещены чуть ранее на уроке, и сейчас мы ограничимся формальным рассмотрением примеров, чего вполне достаточно, чтобы научиться их решать.

Функция одной переменной, как все знают, она обозначается через http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image002.gif или через http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image004.gif. Для данной задачи намного удобнее использовать второе обозначение.

Пример 1

Вычислить приближенно http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image006.gif, заменяя приращения функции ее дифференциалом.

**Решение:** Пожалуйста, перепишите в тетрадь рабочую формулу для приближенного вычисления с помощью [дифференциала](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html):

http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image008.gif

На первом этапе необходимо составить функцию http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image004_0000.gif. По условию предложено вычислить кубический корень из числа: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image006_0000.gif, поэтому соответствующая функция имеет вид: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image011.gif. Нам нужно с помощью формулы найти приближенное значение http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image013.gif.

Смотрим на *левую часть* формулы http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image008_0000.gif, и в голову приходит мысль, что число 67 необходимо представить в виде http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image015.gif. Как проще всего это сделать? Рекомендую следующий алгоритм: вычислим данное значение на калькуляторе:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image017.gif – получилось 4 с хвостиком, это важный ориентир для решения.

В качестве http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image019.gif подбираем «хорошее» значение, **чтобы корень извлекался нацело**. Естественно, это значение http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image019_0000.gif должно быть **как можно ближе** к 67. В данном случае: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image021.gif. Действительно: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image023.gif.

*Примечание: Когда с подбором http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image019_0001.gif всё равно возникает затруднение, просто посмотрите на скалькулированное значение (в данном случае http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image026.gif), возьмите ближайшую  целую часть (в данном случае 4) и возведите её нужную в степень (в данном случае http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image028.gif). В результате и будет выполнен нужный подбор: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image021_0000.gif.*

Если http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image021_0001.gif, то приращение аргумента: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image031.gif.

Итак, число 67 представлено в виде суммы http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image033.gif

Далее работаем с *правой частью* формулы http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image008_0001.gif.

Сначала вычислим значение функции в точке http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image021_0002.gif. Собственно, это уже сделано ранее:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image036.gif

[Дифференциал в точке](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html) находится по формуле:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image038.gif

Из формулы следует, что нужно взять первую производную:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image040.gif

И найти её значение в точке http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image019_0002.gif:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image043.gif

Таким образом:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image045.gif

Согласно формуле http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image008_0002.gif:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image047.gif

Найденное приближенное значение достаточно близко к значению http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image026_0000.gif, вычисленному с помощью микрокалькулятора.

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image050.gif

Пример 2

Вычислить приближенно http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image052.gif, заменяя приращения функции ее дифференциалом.

Это пример для самостоятельного решения. Сначала рекомендую вычислить точное значение http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image052_0000.gif на микрокалькуляторе, чтобы выяснить, какое число принять за http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image019_0003.gif, а какое – за http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image056.gif. Следует отметить, что http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image056_0000.gif в данном примере будет отрицательным.

Пример 3

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image059.gif в точке http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image061.gif. Вычислить более точное значение функции в точке http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image061_0000.gif с помощью микрокалькулятора, оценить абсолютную и относительную погрешность вычислений.

Фактически то же самое задание, его запросто можно переформулировать так: «Вычислить приближенное значение http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image063.gif с помощью дифференциала»

**Решение:** Используем знакомую формулу: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image008_0003.gif  
В данном случае уже дана готовая функция: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image066.gif. Ещё раз обращаю внимание, что для обозначения функции вместо «игрека» удобнее использовать http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image004_0001.gif.

Значение http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image061_0001.gif необходимо представить в виде http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image069.gif. Ну, тут легче, мы видим, что число 1,97 очень близко к «двойке», поэтому напрашивается http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image071.gif. И, следовательно: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image073.gif.  
Вычислим значение функции в точке http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image071_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image075.gif

Используя формулу http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image038_0000.gif, вычислим дифференциал в этой же точке.

Находим первую производную:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image078.gif

И её значение в точке http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image071_0001.gif:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image080.gif

Таким образом, дифференциал в точке:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image082.gif

В результате, по формуле http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image008_0004.gif:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image084.gif

Вторая часть задания состоит в том, чтобы найти абсолютную и относительную погрешность вычислений.

**Абсолютная погрешность вычислений** находится по формуле:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image086.gif

Знак модуля показывает, что нам без разницы, какое значение больше, а какое меньше. Важно, *насколько далеко* приближенный результат отклонился от точного значения в ту или иную сторону.

**Относительная погрешность вычислений** находится по формуле:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image088.gif, или, то же самое:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image090.gif

Относительная погрешность показывает, *на сколько процентов* приближенный результат отклонился от точного значения. Существует версия формулы и без домножения на 100%, но на практике я почти всегда вижу вышеприведенный вариант с процентами.

После короткой справки вернемся к нашей задаче, в которой мы вычислили приближенное значение функции http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image092.gif с помощью дифференциала.

Вычислим точное значение функции с помощью микрокалькулятора:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image094.gif, строго говоря, значение всё равно приближенное, но мы будем считать его точным. Такие уж задачи встречаются.

Вычислим абсолютную погрешность:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image096.gif

Вычислим относительную погрешность:  
http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image098.gif, получены тысячные доли процента, таким образом, дифференциал обеспечил просто отличное приближение.

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image092_0000.gif, абсолютная погрешность вычислений http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image100.gif, относительная погрешность вычислений http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image102.gif

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 4

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image104.gif в точке http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image106.gif. Вычислить более точное значение функции в данной точке, оценить абсолютную и относительную погрешность вычислений.

Многие обратили внимание, что во всех рассмотренных примерах фигурируют корни. Это не случайно, в большинстве случаев в рассматриваемой задаче действительно предлагаются функции с корнями.

Пример 5

Вычислить приближенно с помощью дифференциала  значение функции http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image108.gif в точке http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image110.gif

Этот коротенький, но познавательный пример тоже для самостоятельного решения.

Пример 6

Вычислить приближенно с помощью дифференциала http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image112.gif, результат округлить до двух знаков после запятой.

**Решение:** Что нового в задании? По условию требуется округлить результат до двух знаков после запятой.  
Алгоритм решения принципиально сохраняется, то есть необходимо, как и в предыдущих примерах, применить формулу http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image008_0005.gif

Записываем очевидную функцию http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image117.gif

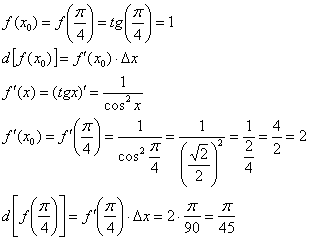
Значение http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image119.gif нужно представить в виде http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image069_0000.gif. Серьёзную помощь окажет [таблица значений тригонометрических функций](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf)..

Анализируя таблицу, замечаем «хорошее» значение тангенса, которое близко располагается к 47 градусам: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image122.gif

Таким образом: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image124.gif

После предварительного анализа градусы необходимо перевести в радианы.

В данном примере непосредственно из тригонометрической таблицы можно выяснить, что http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image126.gif. По формуле перевода градусов в радианы: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image128.gif (формулы можно найти в той же таблице).

Дальнейшее шаблонно:  


Таким образом: http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image132.gif (при вычислениях используем значение http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image134.gif). Результат, как и требовалось по условию, округлён до двух знаков после запятой.

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image136.gif

Домашнее задание: Вычислить приближенно с помощью дифференциала http://www.mathprofi.ru/f/priblizhennye_vychislenija_s_pomoshju_differenciala_clip_image138.gif, результат округлить до трёх знаков после запятой.

Преподаватель Науразова Л.А