Дата: **23.12.2020**

Группа: **20-ПСО-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Приложение дифференциала к приближенным вычислениям**

На данном уроке мы рассмотрим широко распространенную задачу **о** приближенном вычислении значения функции с помощью дифференциала. Здесь и далее речь пойдёт о дифференциалах первого порядка, для краткости я часто буду говорить просто «дифференциал». Задача о приближенных вычислениях с помощью дифференциала обладает жёстким алгоритмом решения, и, следовательно, особых трудностей возникнуть не должно.

Приближенные вычисления
с помощью дифференциала функции одной переменной

Рассматриваемое задание и его геометрический смысл уже освещены чуть ранее на уроке, и сейчас мы ограничимся формальным рассмотрением примеров, чего вполне достаточно, чтобы научиться их решать.

Функция одной переменной, как все знают, она обозначается через  или через . Для данной задачи намного удобнее использовать второе обозначение.

Пример 1

Вычислить приближенно , заменяя приращения функции ее дифференциалом.

**Решение:** Пожалуйста, перепишите в тетрадь рабочую формулу для приближенного вычисления с помощью [дифференциала](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html):



На первом этапе необходимо составить функцию . По условию предложено вычислить кубический корень из числа: , поэтому соответствующая функция имеет вид: . Нам нужно с помощью формулы найти приближенное значение .

Смотрим на *левую часть* формулы , и в голову приходит мысль, что число 67 необходимо представить в виде . Как проще всего это сделать? Рекомендую следующий алгоритм: вычислим данное значение на калькуляторе:
 – получилось 4 с хвостиком, это важный ориентир для решения.

В качестве  подбираем «хорошее» значение, **чтобы корень извлекался нацело**. Естественно, это значение  должно быть **как можно ближе** к 67. В данном случае: . Действительно: .

*Примечание: Когда с подбором  всё равно возникает затруднение, просто посмотрите на скалькулированное значение (в данном случае ), возьмите ближайшую  целую часть (в данном случае 4) и возведите её нужную в степень (в данном случае ). В результате и будет выполнен нужный подбор: .*

Если , то приращение аргумента: .

Итак, число 67 представлено в виде суммы 

Далее работаем с *правой частью* формулы .

Сначала вычислим значение функции в точке . Собственно, это уже сделано ранее:


[Дифференциал в точке](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html) находится по формуле:


Из формулы следует, что нужно взять первую производную:


И найти её значение в точке :


Таким образом:


Согласно формуле :


Найденное приближенное значение достаточно близко к значению , вычисленному с помощью микрокалькулятора.

**Ответ:** 

Пример 2

Вычислить приближенно , заменяя приращения функции ее дифференциалом.

Это пример для самостоятельного решения. Сначала рекомендую вычислить точное значение  на микрокалькуляторе, чтобы выяснить, какое число принять за , а какое – за . Следует отметить, что  в данном примере будет отрицательным.

Пример 3

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции  в точке . Вычислить более точное значение функции в точке  с помощью микрокалькулятора, оценить абсолютную и относительную погрешность вычислений.

Фактически то же самое задание, его запросто можно переформулировать так: «Вычислить приближенное значение  с помощью дифференциала»

**Решение:** Используем знакомую формулу: 
В данном случае уже дана готовая функция: . Ещё раз обращаю внимание, что для обозначения функции вместо «игрека» удобнее использовать .

Значение  необходимо представить в виде . Ну, тут легче, мы видим, что число 1,97 очень близко к «двойке», поэтому напрашивается . И, следовательно: .
Вычислим значение функции в точке :


Используя формулу , вычислим дифференциал в этой же точке.

Находим первую производную:


И её значение в точке :


Таким образом, дифференциал в точке:


В результате, по формуле :


Вторая часть задания состоит в том, чтобы найти абсолютную и относительную погрешность вычислений.

**Абсолютная погрешность вычислений** находится по формуле:


Знак модуля показывает, что нам без разницы, какое значение больше, а какое меньше. Важно, *насколько далеко* приближенный результат отклонился от точного значения в ту или иную сторону.

**Относительная погрешность вычислений** находится по формуле:
, или, то же самое:


Относительная погрешность показывает, *на сколько процентов* приближенный результат отклонился от точного значения. Существует версия формулы и без домножения на 100%, но на практике я почти всегда вижу вышеприведенный вариант с процентами.

После короткой справки вернемся к нашей задаче, в которой мы вычислили приближенное значение функции  с помощью дифференциала.

Вычислим точное значение функции с помощью микрокалькулятора:
, строго говоря, значение всё равно приближенное, но мы будем считать его точным. Такие уж задачи встречаются.

Вычислим абсолютную погрешность:


Вычислим относительную погрешность:
, получены тысячные доли процента, таким образом, дифференциал обеспечил просто отличное приближение.

**Ответ:** , абсолютная погрешность вычислений , относительная погрешность вычислений 

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 4

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции  в точке . Вычислить более точное значение функции в данной точке, оценить абсолютную и относительную погрешность вычислений.

Многие обратили внимание, что во всех рассмотренных примерах фигурируют корни. Это не случайно, в большинстве случаев в рассматриваемой задаче действительно предлагаются функции с корнями.

Пример 5

Вычислить приближенно с помощью дифференциала  значение функции  в точке 

Этот коротенький, но познавательный пример тоже для самостоятельного решения.

Пример 6

Вычислить приближенно с помощью дифференциала , результат округлить до двух знаков после запятой.

**Решение:** Что нового в задании? По условию требуется округлить результат до двух знаков после запятой.
Алгоритм решения принципиально сохраняется, то есть необходимо, как и в предыдущих примерах, применить формулу 

Записываем очевидную функцию 

Значение  нужно представить в виде . Серьёзную помощь окажет [таблица значений тригонометрических функций](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf)..

Анализируя таблицу, замечаем «хорошее» значение тангенса, которое близко располагается к 47 градусам: 

Таким образом: 

После предварительного анализа градусы необходимо перевести в радианы.

В данном примере непосредственно из тригонометрической таблицы можно выяснить, что . По формуле перевода градусов в радианы:  (формулы можно найти в той же таблице).

Дальнейшее шаблонно:


Таким образом:  (при вычислениях используем значение ). Результат, как и требовалось по условию, округлён до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 

Домашнее задание: Вычислить приближенно с помощью дифференциала , результат округлить до трёх знаков после запятой.

Преподаватель Науразова Л.А