Дата: 15.12.2020г.

Группа: 19-ИСиП-1д

Наименование дисциплины/МДК: Элементы высшей математики

Тема: Определение числового ряда. Свойства рядов.

*Числовым рядом называется выражение вида*



где числа  называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность. Ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм



при n→ ∞ имеет конечный предел: Этот предел называется суммой сходящегося ряда. Если  не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся.

**Пример 1*.*** Найти сумму ряда. ** .**

*Решение. По определению частичной суммы ряда имеем*



Таким образом, получаем последовательность частичных сумм: общий член который равен . 

Это означает, что ряд сходится и сумма его равна единице.

*Необходимый признак сходимости ряда.*

Ряд может сходиться только при условии, что его общий член  при неограниченном увеличении номера  стремится к нулю:  - это необходимый признак сходимости ряда.

Если же  то ряд расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

1. Признак сравнения*.*Если членызнакоположительного ряда

 (1)

начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда

 (2)

то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется геометрическая прогрессия.



которая сходится при  и расходится при 

Гармонический ряд



является расходящимся рядом.

2. Признак Даламбера**.** Если для ряда (1) существует предел



то при  ряд сходится,  - расходится (при  вопрос о сходимости ряда остается открытым).

3. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

 (1)

где  положительные числа.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий признак сходимости.

Признак Лейбница*.*Ряд (1) сходится, если его члены монотонно убывают по абсолютной величине и общий член стремится к нулю при 

Применение сходящихся рядов к приближенным вычислениям основано на замене суммы ряда суммой нескольких первых его членов. Допускаемая при этом погрешность очень просто оценивать для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, - эта погрешность меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда.

**Пример 2*.*** Пользуясь необходимым признаком сходимости, показать, что ряд  расходится.

Решение*.* Находим



Таким образом, предел общего члена ряда при  отличен от нуля, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется. Это означает, что данный ряд расходится.

**Пример 3***.* С помощью признака сравнения исследовать на сходимость ряд:



Решение.1) Сравним данный ряд с рядом

** .** (\*)

Ряд (\*) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессии со знаменателем  При этом каждый членисследуемого ряда меньше соответствующего члена  ряда (\*).Поэтому, согласно признаку сравнения, данный ряд сходится.

2) Сравним данный ряд с гармоническим рядом

 . (\*\*)

Каждый член исследуемого ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена  ряда (\*\*). Так как гармонический ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, расходится и данный ряд.

**Пример 4.** С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряд:

****

Решение.1) Для того чтобы воспользоваться признаком Даламбера, надо знать (n+1)-й член ряда. Он получается путем подстановки в выражение общего члена ряда  вместо n числа . Теперь найдем предел отношения - го члена к -му члену при :

.

Так как  то данный ряд сходится.

2)зная  найдем член ряда:

Вычислим



Так как то ряд расходится.

**Пример 5*.*** Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

 .

Решение.Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонного убывают:

 .

и общий член при  стремится к нулю:



то в силу признака Лейбница ряд сходится.

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение числового ряда. Какие ряды называются сходящимися и расходящимися?
2. Перечислите основные свойства числовых рядов.
3. Назовите признаки сходимости рядов с положительными членами.
4. Дайте определения знакочередующихся и знакопеременных рядов.
5. Сформулируйте признак Лейбница.
6. Дайте определения абсолютно и условно сходящихся знакопеременных рядов.
7. Сформулируйте достаточный признак абсолютной сходимости знакопеременного ряда.

Преподаватель Х.Ш. Сулиманова