Дата: **18.12.2020**

Группа: **20-ПСО-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Практическое занятие по теме:** «**Вычисление производных»**

**Достаточное условие** экстремума дается в следующих теоремах.

**Теорема 1.** Если *х*0 – критическая точка функции и при переходе через нее производная меняет знак, то *х*0 – точка экстремума, а именно, если производная меняет знак с плюса на минус – точка максимума, если – с минуса на плюс – точка минимума.

Заметим, что экстремума в точке нет, если производная не меняет знака. Правило исследования на экстремум с помощью первой производной известно из школьного курса. Достаточное условие экстремума иногда удобнее формулировать с помощью второй производной.

Пусть функция ƒ(*х*) дважды дифференцируема в некоторой области (т. е. ƒ(*х*)имеет ƒ′(*х*) и *ƒ*′′(*х*)).

**Теорема 2.** Если *х*0 – критическая точка функции *ƒ(х)* и ƒ*′′(х0) > 0*, то *х*0 – точка минимума, если *ƒ′′(х0)* < 0, то *х*0 – точка максимума.

С помощью второй производной определяется выпуклость или вогнутость графика функции.

**Выпуклость, вогнутость. Точка перегиба.**

Кривая *у=ƒ*(*х*) называется **выпукло*й*** на интервале, если все точки кривой лежат **ниже** любой ее **касательной** на этом интервале. Тогда на этом интервале

ƒ′′(*х*)< 0*.*

Кривая *у=ƒ*(*х*) называется ***вогнутой*** на интервале, если все точки кривой лежат ***выше*** любой ее ***касательной*** на этом интервале. Тогда на этом интервале

ƒ′′(х) > 0

**Определение.** ***Точкой перегиба*** кривой называется точка, по одну сторону от которой кривая выпукла, по другую вогнута.

В точке перегиба *ƒ*′′(*х*)=0.

Итак, знак второй производной (как и знак самой функции и ее первой производной) свидетельствует об особенностях графика функции. Еще раз остановимся на них.

Если для всех *х* на интервале (*а*, *b*) *ƒ*(*х*) > 0 (*ƒ*(*х*) <0), то график лежит выше (ниже) оси абсцисс.

Если для всех *х* на интервале (*а*, *b*) *ƒ*′(*х*) > 0 (*ƒ*′(*х*) < 0), то функция на (*а*, *b*) возрастает (убывает).

Если для всех *х* на интервале (*а*, *b*) *ƒ*′′(*х*) > 0 (*ƒ*′′(*х*) < 0), то график на (*а*, *b*) вогнут (выпукл).

Уравнение ƒ(*х*)=0 определяет «нули» функции, т. е. точки пересечения графика с осью Ох.

Уравнение *ƒ*′(*х*)=0 определяет критические точки.

Уравнение *ƒ*′′(*х*)=0 определяет возможные точки перегиба.

**Схема исследования функции**

Для исследования функции *ƒ*(*х*) и построения графика *у=ƒ*(*х*) следует найти:

1) область определения функции и точки пересечения графика с осями координат;

2) интервалы монотонности;

3) точки экстремумов и значения функции в этих точках;

4) интервалы выпуклости и вогнутости графика;

5) точки перегиба графика;

6) построить в декартовой системе координат все полученные точки (иногда, для уточнения графика, получают дополнительные точки) и сам график.

**Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке**

При решении некоторых задач метода оптимизации важно уметь находить наименьшее или наибольшее значения функции на некотором отрезке. Эти значения функция достигает либо в критических точках, либо на концах отрезка.

**Схема отыскания** наименьшего и наибольшего значений функции *ƒ*(*х*) на отрезке [*а*, *b*].

1. Найти производную функции *ƒ*′(*х*).

2. Найти критические точки из уравнения *ƒ*′(*х*)=0.

3. Выбрать те критические точки, которые принадлежат данному отрезку [*а*, *b*] и найти значение функции *ƒ*(*х*) в каждой такой точке.

4. Вычислить значения функции *ƒ*(*х*) на концах отрезка: ƒ(*а*) и ƒ(*b*).

5. Из полученных значений функции выбрать самое большое (наибольшее) и самое малое (наименьшее).

**Пример 2.**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции *ƒ(х)*=*х3–9х2+24х–10* на отрезке [0 3].

1. *ƒ*′(*х*)*=*3*х*2*–*9·2*х*2*+*24*.*

2. ƒ′(*х*)=0, 3(*х*2–6*х*+8)=0, *х*1=2, *х*2=4.

3. Точка х2=4 не принадлежит отрезку [0, 3]. Поэтому вычислим значение функции только в точке *х*1=2

ƒ(2)=23–9·22+24·2–10=10.

4. Значения функции на концах отрезка: ƒ(0)= –10, ƒ(3)=33–9·32+24·3–10, ƒ(3)=8.

5. Получены значения:

ƒ(2)=10, ƒ(0)= –10, ƒ(3)=8.

Наибольшее значение равно 10 и достигается в точке *х*=2. Наименьшее – равно –10 и достигается в точке *х*=0.

**Пример 3.**

Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой *у=х*+36*х*2–2*х*3–*х*4.

Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, т. е. *х*Є(–∞, +∞).

Найдем вторую производную.

*у*′=1+72*х*–6*х*2–4*х*3.

*у*′′=72–12*х*–12*х*2= –12(*х*2+*х*–6).

Из уравнения *у*′′=0 получим абсциссу точки перегиба:

–12(*х*2+*х*–6)=0 *х*1= –3; *х*2=2.

Определим знак *у*′′ на интервалах

(–∞; –3), (–3; 2), (2, +∞).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | (–∞, –3) | -3 | (–3; 2) | 2 | (2; +∞) |
| *у*′′ | – | 0 | + | 0 | – |
| форма кривой | выпуклая | перегиб | вогнута | перегиб | выпуклая |

Найдем ординаты точек перегиба:

*у*(–3)=726; *М*1(–3; 726) – точка перегиба

*у*(2)=114; *М*2(2; 114) – точка перегиба.

На интервале (–3; 2) кривая вогнута. На интервалах (–∞; –3) и (2; +∞) – выпуклая.

**ВЫПОЛНИТЬ ЗАДАНИЯ**

Найти производную функции

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **Задания** | | | | | |
| **1** |  |  |  |  |  |
| **2** |  |  |  |  |  |

Найти производную сложной функции

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант | Задания | |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение выпуклости (вогнутости) кривой на промежутке.

2. Каково правило отыскания интервалов выпуклости и вогнутости кривой?

3. Точка перегиба кривой. Как ее найти?

4. Каков алгоритм построения графика функции?

Преподаватель Науразова Л.А