Дата: **20.01.2021**

Группа: **20-ПСО-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Формула Ньютона-Лейбница**

Для того чтобы научиться решать определённые интегралы необходимо

1)  Уметь находить неопределённые интегралы.

2)  Уметь вычислить определённый интеграл.

В общем виде определённый интеграл записывается так:

[https://1.bp.blogspot.com/-SnWW2rFsR28/Xqoqo2fxLVI/AAAAAAAA090/1TY6ZukOBhkqlDl2vY4Zhn2fIeFHK8k2QCLcBGAsYHQ/s1600/2.png](https://1.bp.blogspot.com/-SnWW2rFsR28/Xqoqo2fxLVI/AAAAAAAA090/1TY6ZukOBhkqlDl2vY4Zhn2fIeFHK8k2QCLcBGAsYHQ/s1600/2.png)

По сравнению с неопределённым интегралом прибавились пределы интегрирования.

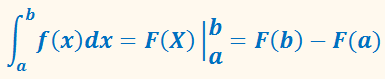
Нижний предел интегрирования обозначается буквой  *а*.

Верхний предел интегрирования обозначается буквой  *b*.

Отрезок  [*a*; *b*]  называется отрезком интегрирования.

Определённый интеграл – это число. Решить определённый интеграл это значит найти число.

Находится определённый интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

[](https://1.bp.blogspot.com/--UZVUjl7nSg/Xqoq-IVxv3I/AAAAAAAA0-A/H0sBZ4m88NI8knDQPoLgw_Di4wf8M9KpgCLcBGAsYHQ/s1600/3.png)

***Этапы решения определённого интеграла.***

1)  Сначала находим первообразную функцию

*F*(*Х*)

(неопределённый интеграл). Константа  *С*  в определённом интеграле не добавляется.

Обозначение

[https://1.bp.blogspot.com/-aLVftd0znA0/XqoramzBVzI/AAAAAAAA0-I/B0k-EgaootsVvEsPPwZYaeIO6vt6xZ6hQCLcBGAsYHQ/s1600/4.png](https://1.bp.blogspot.com/-aLVftd0znA0/XqoramzBVzI/AAAAAAAA0-I/B0k-EgaootsVvEsPPwZYaeIO6vt6xZ6hQCLcBGAsYHQ/s1600/4.png)

является чисто техническим, и вертикальная палочка не несёт никакого математического смысла. Запись

[https://1.bp.blogspot.com/-2B8gKiv--2g/XqorutY8dKI/AAAAAAAA0-Q/eBWhXuRHu4MMUwlBOVpGcBAe90Jw_zk4gCLcBGAsYHQ/s1600/5.png](https://1.bp.blogspot.com/-2B8gKiv--2g/XqorutY8dKI/AAAAAAAA0-Q/eBWhXuRHu4MMUwlBOVpGcBAe90Jw_zk4gCLcBGAsYHQ/s1600/5.png)

нужна для подготовки применения формулы Ньютона-Лейбница.

2)  Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию

*F*(*b*).

3)  Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию

*F*(*а*).

4)  Находим разность (число)

*F*(*b*) – *F*(*a*).

Определённый интеграл существует не всегда.

**ПРИМЕР:**

*Интеграла*

*[https://1.bp.blogspot.com/-Pn8F4dtYQKE/XqosG3Yn8XI/AAAAAAAA0-Y/Wlt6nsHKa3wmV2ly1xUz2sx9ojCuhOavACLcBGAsYHQ/s1600/6.png](https://1.bp.blogspot.com/-Pn8F4dtYQKE/XqosG3Yn8XI/AAAAAAAA0-Y/Wlt6nsHKa3wmV2ly1xUz2sx9ojCuhOavACLcBGAsYHQ/s1600/6.png)*

*не существует, поскольку отрезок интегрирования*

[–5; –2]

*не входит в область определения подынтегральной функции*(*значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными*).

**ПРИМЕР:**

*Интеграла*

*[https://1.bp.blogspot.com/-eEppb8Bs0hs/XqosjoPKeLI/AAAAAAAA0-g/CHhVRYYdF-oyDzMn52ZtKISvNHI9YctDwCLcBGAsYHQ/s1600/7.png](https://1.bp.blogspot.com/-eEppb8Bs0hs/XqosjoPKeLI/AAAAAAAA0-g/CHhVRYYdF-oyDzMn52ZtKISvNHI9YctDwCLcBGAsYHQ/s1600/7.png)*

*не существует, поскольку на отрезке интегрирования*  [–2; 3]  *тангенс терпит бесконечные разрывы в точках*

*х* = –*π/*2,  *х* = *π/*2.

***Для того чтобы определённый интеграл существовал, достаточно чтобы подынтегральная функция была непрерывной на отрезке интегрирования.***

Поэтому перед тем, как приступить к решению любого определённого интеграла, нужно убедиться в том, что подынтегральная функция непрерывна на отрезке интегрирования.

Определённый интеграл может быть равен отрицательному числу или нулю.

Нижний предел интегрирования может быть больше верхнего предела интегрирования.

**ПРИМЕР:**

**[https://1.bp.blogspot.com/-yH1mAH62RfU/XqotCyn_bsI/AAAAAAAA0-o/sBIQZRUMRI4-ljVLXMw9PxA3PxAvTI5lQCLcBGAsYHQ/s1600/8.png](https://1.bp.blogspot.com/-yH1mAH62RfU/XqotCyn_bsI/AAAAAAAA0-o/sBIQZRUMRI4-ljVLXMw9PxA3PxAvTI5lQCLcBGAsYHQ/s1600/8.png)**

*Интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.*

***Свойства определённого интеграла.***

1)  В определённом интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак.

[https://1.bp.blogspot.com/-qpkKHDByiRo/XqotbDT9zFI/AAAAAAAA0-w/XR6fk_N-BGYPLzNyFVUp20iB373JDNyRgCLcBGAsYHQ/s1600/9.png](https://1.bp.blogspot.com/-qpkKHDByiRo/XqotbDT9zFI/AAAAAAAA0-w/XR6fk_N-BGYPLzNyFVUp20iB373JDNyRgCLcBGAsYHQ/s1600/9.png)

**ПРИМЕР:**  
 *В определённом интеграле*

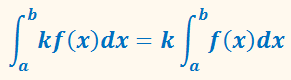
*[https://1.bp.blogspot.com/-L5OeFKX5xkE/XqotpMCEKrI/AAAAAAAA0-0/PO3e70HMkzUqTlGtPMfuOhYSCMAnepr5wCLcBGAsYHQ/s1600/8.png](https://1.bp.blogspot.com/-L5OeFKX5xkE/XqotpMCEKrI/AAAAAAAA0-0/PO3e70HMkzUqTlGtPMfuOhYSCMAnepr5wCLcBGAsYHQ/s1600/8.png)*

*перед интегрированием целесообразно поменять пределы интегрирования на*<<*привычный*>>*порядок*:

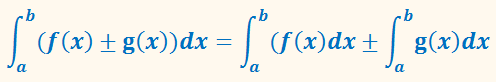
[https://1.bp.blogspot.com/-WGSy1viKces/XqouU00JimI/AAAAAAAA0_I/p3F6OJf9w08eU1O9_vmr-0V6fSW8HftWQCLcBGAsYHQ/s1600/10.png](https://1.bp.blogspot.com/-WGSy1viKces/XqouU00JimI/AAAAAAAA0_I/p3F6OJf9w08eU1O9_vmr-0V6fSW8HftWQCLcBGAsYHQ/s1600/10.png)

*В таком виде интегрировать значительно удобнее*.

2)  Свойства линейности.

[](https://1.bp.blogspot.com/-YrwWJddxh9s/XqouhdBUG8I/AAAAAAAA0_M/_IkfZBJ1p8gkUpQ3YMJHKzWuTaQ-lkRiACLcBGAsYHQ/s1600/11.png)

где   *k = const*.

[](https://1.bp.blogspot.com/-T3PG0kQM2oQ/Xqou0GhNptI/AAAAAAAA0_Y/E5vgk1eJJdcdKFu59dY8mT18DawAITeSACLcBGAsYHQ/s1600/12.png)

Это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

**ПРИМЕР:**

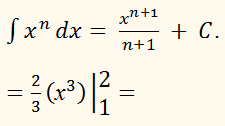
*Вычислить определённый интеграл*:

[https://1.bp.blogspot.com/-dEh7nv0nSSk/XqowDDPEDII/AAAAAAAA0_k/ZkX-PzbAZPUpUtr-gWlR1Z36hz8B6o0bQCLcBGAsYHQ/s1600/13.png](https://1.bp.blogspot.com/-dEh7nv0nSSk/XqowDDPEDII/AAAAAAAA0_k/ZkX-PzbAZPUpUtr-gWlR1Z36hz8B6o0bQCLcBGAsYHQ/s1600/13.png)

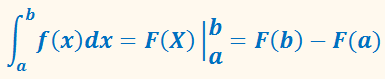
**РЕШЕНИЕ:**  
 *Выносим константу за знак интеграла*:

[https://1.bp.blogspot.com/--cNqAsfEAl4/XqowVR_ovnI/AAAAAAAA0_s/az2Kjx1dwyotsBsTmlaU_8g2KQqCe3IOACLcBGAsYHQ/s1600/14.png](https://1.bp.blogspot.com/--cNqAsfEAl4/XqowVR_ovnI/AAAAAAAA0_s/az2Kjx1dwyotsBsTmlaU_8g2KQqCe3IOACLcBGAsYHQ/s1600/14.png)

*Интегрируем по таблице с помощью формулы*

*[](https://1.bp.blogspot.com/-wHdGh_4bVJc/XqowmIEA8oI/AAAAAAAA0_0/L8yZshhpSd0LXGVhLYYoexEXLnamvj7KwCLcBGAsYHQ/s1600/15.png)*

*Используем формулу Ньютона-Лейбница.*

*[](https://1.bp.blogspot.com/-KFPaNYnYT9g/XqowvVexkvI/AAAAAAAA0_4/DV8nxbc5Pv8cM-5kH0Xq5CjCvW5ktVGkwCLcBGAsYHQ/s1600/3.png)*

*Сначала подставляем в  х*3*верхний предел, зптем нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.*

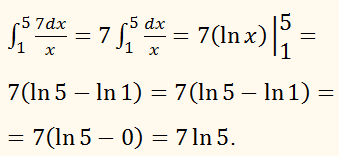
= 2*/*3 (23 – 13) = 2*/*3 (8 – 1) = 2*/*3 ∙ 7 = 14*/*3 = 42*/*3.

**ПРИМЕР:**

*Вычислить определённый интеграл*:

[https://1.bp.blogspot.com/-ccVdsIoRbCg/XqoxIZy7cTI/AAAAAAAA1AE/6JMipDQeRRYq9NzXpPvjp9s1d3f-4518wCLcBGAsYHQ/s1600/16.png](https://1.bp.blogspot.com/-ccVdsIoRbCg/XqoxIZy7cTI/AAAAAAAA1AE/6JMipDQeRRYq9NzXpPvjp9s1d3f-4518wCLcBGAsYHQ/s1600/16.png)

**РЕШЕНИЕ:**

**[](https://1.bp.blogspot.com/-uahFAlNQ7V0/XqoxdWDzyAI/AAAAAAAA1AQ/T0Lkpry6Tp4PBDk9Ke3cDjrUOTRGSdA6gCLcBGAsYHQ/s1600/17.png)**

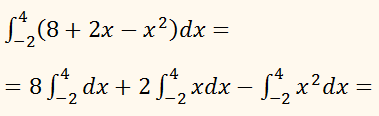
**ПРИМЕР:**

*Вычислить определённый интеграл*:

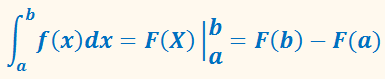
[https://1.bp.blogspot.com/-vFLJ_T1PrpU/XqoxtXKyjfI/AAAAAAAA1AY/bYFGn8IOmzoo8kGTGBXq4Fj9GMaxZ-yXgCLcBGAsYHQ/s1600/18.png](https://1.bp.blogspot.com/-vFLJ_T1PrpU/XqoxtXKyjfI/AAAAAAAA1AY/bYFGn8IOmzoo8kGTGBXq4Fj9GMaxZ-yXgCLcBGAsYHQ/s1600/18.png)

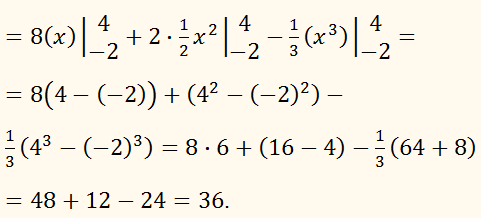
**РЕШЕНИЕ:**

*Используем свойства линейности определённого интеграла.*

*[](https://1.bp.blogspot.com/-gh5fVxC_mzY/XqoyGgS_o2I/AAAAAAAA1Ag/x4hT4OCRDY8coNDrqRjIiuMNyBCpxm0JACLcBGAsYHQ/s1600/19.png)*

*Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница.*

*[](https://1.bp.blogspot.com/-IFMo09t6nP8/XqoyggVdu9I/AAAAAAAA1Ao/xaokq7XHyLwvzmq2sWYBry9hByyNIJlGgCLcBGAsYHQ/s1600/3.png)*

*[](https://1.bp.blogspot.com/-V6QeXQ2TEJQ/XqoyiVcW-nI/AAAAAAAA1As/An88iSHC3u4dbCo3RuFDOWKq5OYPmLVGgCLcBGAsYHQ/s1600/20.png)*

Рассмотрим второй способ решения этого интеграла.

**ПРИМЕР:**

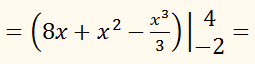
*Вычислить определённый интеграл*:

[https://1.bp.blogspot.com/-cXuB3OaKiXw/XqozDzLNwNI/AAAAAAAA1A8/8mAn49YWS94Zue1CiXyciIw-GvhUZHLVACLcBGAsYHQ/s1600/21.png](https://1.bp.blogspot.com/-cXuB3OaKiXw/XqozDzLNwNI/AAAAAAAA1A8/8mAn49YWS94Zue1CiXyciIw-GvhUZHLVACLcBGAsYHQ/s1600/21.png)

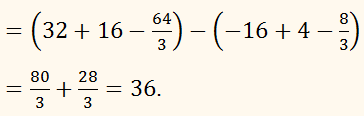
**РЕШЕНИЕ:**

**[https://1.bp.blogspot.com/-W-JFPplTpZo/XqozqMkTdVI/AAAAAAAA1BI/1x-KNT5o5DQ3T2-TX69kWA_1MoNfHjG-QCLcBGAsYHQ/s1600/23.png](https://1.bp.blogspot.com/-W-JFPplTpZo/XqozqMkTdVI/AAAAAAAA1BI/1x-KNT5o5DQ3T2-TX69kWA_1MoNfHjG-QCLcBGAsYHQ/s1600/23.png)**

*Сначала используем правило линейности и проинтегрируем по таблице*. *Получается одна скобка с отчёркиванием пределов*.

[](https://1.bp.blogspot.com/-ZTgSwiYjbeo/XqozeUiRScI/AAAAAAAA1BE/ETRtl0hNbmoAVD7QaU93_8o-o6KMFRBrQCLcBGAsYHQ/s1600/22.png)

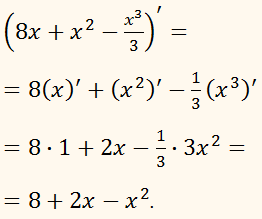
*В первообразную функцию сначала подставим  4, затем  –2. А затем найдём разность.*

*[](https://1.bp.blogspot.com/-K2qyefWqAEs/Xqoz6C4zH-I/AAAAAAAA1BU/ABfsTBEqOuM2bp800x6DSsGiVUlOfvRzgCLcBGAsYHQ/s1600/24.png)*

Перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку и убедиться, что первообразная функция найдена правильно.Так, применительно к рассматриваемому примеру, перед тем, как в первообразную функцию

[https://1.bp.blogspot.com/-GdsIf7NbGeQ/Xqo0uZKu76I/AAAAAAAA1Bg/j4tRUcoTCGYWPduzxnYdT-66FsGrHk_rwCLcBGAsYHQ/s1600/25.png](https://1.bp.blogspot.com/-GdsIf7NbGeQ/Xqo0uZKu76I/AAAAAAAA1Bg/j4tRUcoTCGYWPduzxnYdT-66FsGrHk_rwCLcBGAsYHQ/s1600/25.png)

подставлять верхний и нижний пределы, необходимо проверить правильно или нет, найден неопределённый интеграл. Дифференцируем:

[](https://1.bp.blogspot.com/-_tOcUYPA-yM/Xqo1HhbXx2I/AAAAAAAA1Bo/ePWtMSpcU7cKFazvpicde59ZRlagPv-XACLcBGAsYHQ/s1600/26.png)

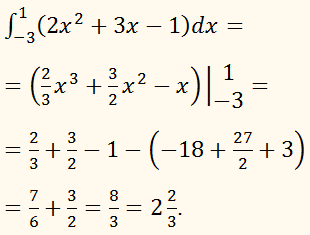
Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределённый интеграл найден верно.

**ПРИМЕР:**

*Вычислить определённый интеграл*:

[https://1.bp.blogspot.com/-N4roP6BH4S0/Xqo1lGXoCwI/AAAAAAAA1Bw/-kiUOVyWxgQ9eAjtSWpl3bVjdg9TXdPCACLcBGAsYHQ/s1600/27.png](https://1.bp.blogspot.com/-N4roP6BH4S0/Xqo1lGXoCwI/AAAAAAAA1Bw/-kiUOVyWxgQ9eAjtSWpl3bVjdg9TXdPCACLcBGAsYHQ/s1600/27.png)

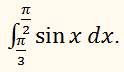
**РЕШЕНИЕ:**

**[](https://1.bp.blogspot.com/-obbt0F9OB2U/Xqo1wROCknI/AAAAAAAA1B0/0wjGfEPVZvU8HHxTsCbT089VyO6RjQzPwCLcBGAsYHQ/s1600/28.png)**

**Домашнее задание**

Вычислить интеграл:

1

[](https://1.bp.blogspot.com/-48q-XcbsJHc/XwHd0RSPH3I/AAAAAAAA298/BRolbgjtIxkdMuCcKgSFFy_cpIUM3linACLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

2

[https://1.bp.blogspot.com/-7XGA4yuzu1E/XwHd-ek4cZI/AAAAAAAA2-A/EZvfwLEWCBw-OEa5G_W8QsW598NEaRfPQCLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-7XGA4yuzu1E/XwHd-ek4cZI/AAAAAAAA2-A/EZvfwLEWCBw-OEa5G_W8QsW598NEaRfPQCLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

 3

[https://1.bp.blogspot.com/-3vS2t0jcmCw/XwHeMHrr81I/AAAAAAAA2-I/Ab_WbxUIDAoxyFs47yOhMD9mP3uzUC2sgCLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-3vS2t0jcmCw/XwHeMHrr81I/AAAAAAAA2-I/Ab_WbxUIDAoxyFs47yOhMD9mP3uzUC2sgCLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

 4

[https://1.bp.blogspot.com/-Vh4wSuvbVKs/XwHea_70GvI/AAAAAAAA2-Q/o6UcOK0xq3I-6hQAIG3C7_Q-b4OGaFcHQCLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-Vh4wSuvbVKs/XwHea_70GvI/AAAAAAAA2-Q/o6UcOK0xq3I-6hQAIG3C7_Q-b4OGaFcHQCLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

5

[https://1.bp.blogspot.com/-9XxTF2ncb_w/XwHe2u8jviI/AAAAAAAA2-c/1IOpIBE8OMAzllcpKnuHzk1TJrOeyTzDgCLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-9XxTF2ncb_w/XwHe2u8jviI/AAAAAAAA2-c/1IOpIBE8OMAzllcpKnuHzk1TJrOeyTzDgCLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

 6

[https://1.bp.blogspot.com/-LMncu18ddMI/XwHfPGv-LuI/AAAAAAAA2-s/PdFh3Xu7kjYvXJPtGB16NJjFPjN4DaXrwCLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-LMncu18ddMI/XwHfPGv-LuI/AAAAAAAA2-s/PdFh3Xu7kjYvXJPtGB16NJjFPjN4DaXrwCLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

 7

[https://1.bp.blogspot.com/-HjzmT2gt9Kw/XwHfY8UsWFI/AAAAAAAA2-0/ePXZ5lc4DDo5t9JPs9o34_VAyjLuTkWEQCLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-HjzmT2gt9Kw/XwHfY8UsWFI/AAAAAAAA2-0/ePXZ5lc4DDo5t9JPs9o34_VAyjLuTkWEQCLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

8

[https://1.bp.blogspot.com/-b9ABmH8vxbw/XwHflkXeT8I/AAAAAAAA2-8/Pd4gbBrqwbwqRItzDm5SU5nd6K_lKGM4ACLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-b9ABmH8vxbw/XwHflkXeT8I/AAAAAAAA2-8/Pd4gbBrqwbwqRItzDm5SU5nd6K_lKGM4ACLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

9

[https://1.bp.blogspot.com/-cnqXRqR8u8g/XwHftQYw5-I/AAAAAAAA2_E/a9UUqkYrvLoAhU3uyXs9IZgcwQF8Hs_pgCLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-cnqXRqR8u8g/XwHftQYw5-I/AAAAAAAA2_E/a9UUqkYrvLoAhU3uyXs9IZgcwQF8Hs_pgCLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

10

[https://1.bp.blogspot.com/-_oiWFf1f_a4/XwHf4XSBsPI/AAAAAAAA2_M/QMLNLWLCmK0jIKNUBsj_aYXC4qxCeLGigCLcBGAsYHQ/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-_oiWFf1f_a4/XwHf4XSBsPI/AAAAAAAA2_M/QMLNLWLCmK0jIKNUBsj_aYXC4qxCeLGigCLcBGAsYHQ/s1600/0.png)

Преподаватель Науразова Л.А