Дата: **17.12.2020**

Группа: **19-ЭК-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Практическое занятие «Вычисление несобственных интегралов» (2 урока)**

**Несобственными интегралами** называются интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода) или интегралы от неограниченных (имеющих разрыв на отрезке интегрирования) функций (II рода).

Несобственные интегралы от неограниченных функций:

а) Если функция f в интеграле стремится к при приближении x к одному из пределов интегрирования, тогда несобственный интеграл будет вычисляться посредством предельного перехода:

 - в случае если f(x) при приближении x к верхнему пределу b;

 - в случае если f(x) при приближении x к нижнему пределу a;

б) Если функция f в интеграле имеет бесконечный разрыв в точке x=c, принадлежащий отрезку [a;b] и непрерывна во всех других точках этого отрезка, тогда несобственный интеграл будет вычисляться посредством предельного перехода:

 ,

где и изменяются независимо друг от друга.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами:

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования определяются посредством следующих предельных переходов:

 ,

 ,

 ,

Если пределы в пп.3.1-3.2 существуют, соответствующие несобственные интегралы считаются сходящимися, если хотя бы один из пределов не существует, несобственный интеграл расходится.

*Пример 1.*

Найти несобственный интеграл .

Решение:

Здесь подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке x=1, лежащей внутри отрезка интегрирования [-1;2]. Поэтому, согласно п.3.1б:

 |

*Пример 2.*

Найти несобственный интеграл .

Решение:

**Неопределенный интеграл и его свойства.**

*Определение 1*.: Функция F(x) называется первообразной для функции ƒ(x) на некотором отрезке [a,b], если для всех из этого отрезка выполняется равенство:

 F'(x)= ƒ(x).

Пример: F(x)=cos(x)+C; ƒ(x)=sin(x);

**Замечание:** если F(x) первообразная для ƒ(x), то (F(x)+С ) тоже первообразная.

*Определение 2.*: Совокупность первообразных, т.е. (F(x)+С), для ƒ(x) на [a,b] называется неопределенным интегралом от f(x) и обозначается:

**∫** ƒ(x) dx = F(x) + C, причем F'(x) = ƒ(x),

ƒ(x) – называется подынтегральной функцией;

ƒ(x)dx – называется подынтегральным выражением;

**Свойства неопределенного интеграла:**

1.(**∫**ƒ(x)dx)' = ƒ(x);

2. d **∫**ƒ(x)dx = ƒ(x)dx;

3. **∫**d F(x) = F(x) + C;

4. **∫(**ƒ1(x)+ ƒ2(x))dx = **∫**ƒ1(x)dx + **∫**ƒ2(x)dx.

5. **∫**k·ƒ(x)dx = k·**∫**ƒ(x)dx, где k – постоянный множитель.

6. Формулы интегрирования не меняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной x некоторой функции u(x), т.е. если **∫**ƒ(x)dx = F(x) + C;

**∫**ƒ(u)du = F(u) + C; | по свойству 3 |

**Таблица основных интегралов.**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **∫** xαdx = xα+1/ (α+1) + C α ≠-1 | 10. = ln | x + | + C |
| 2. = ln |x| + C | 11. = arctg()+C |
| 3. **∫** ex= ex + C | 12. = ln || + C |
| 4. **∫** ax dx = ax/lna + C | 13= ln || + C |
| 5. **∫** sin(x)dx = - cos(x) + C | 14. .∫ tg(x) dx = – ln |cos(x)| + C |
| 6. **∫** cos(x)dx = sin(x) + C | 15. .∫ ctg(x) dx = ln |sin(x)| + C |
| 7. = tg(x) + C | 16= ln |tg()| + C |
| 8. = -ctg(x) + C | 17= ln |tg()| + C |
| 9. = arcsin ( )+ C | 18.. **∫** dx = x + C  |

.

***Примеры:***

 1. ∫dx = ∫ (8-3x)6/5 dx = | d(8-3x) = – 3dx | = – ∫ (8-3x)6/5 (– 3dx) =

– **∫**(8 –3x)6/5 d(8-3x) = – (8-3x)11/5 + C.

 \_\_\_\_\_

2. **∫** x **√**4 + x² dx = **∫** (4 + x²)1/2x dx = | d(4 + x²) = 2x dx| = 1/2 · **∫** (4 + x²)1/22x dx =

 **=** · **∫**(4 + x²)1/2 d(4 + x²) = = + C;

 \_\_\_\_\_\_

3. **∫** 3**√** sin²(x) · cos(x)dx = **∫** (sin(x))2/3 d(sin(x)) = 5/3 (sin(x))5/3 + C

4. Найти интеграл.

dx= dx = | | = = arcsin (x3) + C.

 **Замена переменной в интеграле (метод подстановки).**

Теорема.: Пусть функция x = φ(t) – строго монотонная и непрерывно дифференцируемая на некотором интервале функции φ(t). Если функция ƒ(x) интегрируема на соответствующем интервале изменений x, то имеет место равенство:

**∫** ƒ(x)dx = **∫** ƒ(φ(t))·φ'(t)dt

По определению1 неопределенного интеграла

**∫** ƒ(x)dx = F(x) + C, причем F'(x) = ƒ(x)

Покажем, что функция F(φ(t)) является первообразной для функции: ƒ(φ(t))·φ'(t).

Для этого найдем (F(φ(t)))' = |по правилу дифференцирования сложной функции| = = F'(φ(t))·φ'(t);

Но F'(φ(t)) = ƒ (φ(t)), тогда (F(φ(t)))' = ƒ(φ(t))·φ'(t) **∫**ƒ(φ(t))·φ'(t) dt = F(φ(t)) + C = F(x) + C = **∫**ƒ(x) dx. **∫**ƒ(x) dx = **∫**ƒ(φ(t)) ·φ'(t) dt.

***Пример:***

1. = | ex +1 = t2 ; = t ; ex = t2 – 1 ; x = ln(t2 –1 ) ; dx = dt | =

= = 2 = 2∙ = +C.

 **Интегрирование по частям.**

Пусть U(x) и V(x) дифференцируемые функции на некотором интервале, известно, что

d(UV) = U ∙ dV + V ∙ dU.

Проинтегрируем это равенство:

∫d(UV) = ∫U ∙ dV + ∫V ∙ dU ;

UV = ∫U ∙ dV + ∫V ∙ dU ;

**∫U ∙ dV = UV - ∫V ∙ dU –** формула интегрирования по частям.

Пример:вычислить **∫** x · sin(x) dx

I способ.

 **∫** x · sin(x) dx = | U=x; dU = dx; dV = sin(x) dx; **∫**dV **=** **∫** sin(x) dx;V = -cos(x)| =

= -x · cos(x) - **∫**(- cos(x)) dx **= -** x · cos(x) + sin(x) + C;

**Замечание:** классы функций интегрируем по частям.

I класс – это интегралы вида:

 **∫** Pn(x) · eax dx;

 **∫** Pn(x) · sin(a·x) dx;

 **∫** Pn(x) · cos(a·x)dx , где Pn(x) – это многочлен первой степени, в этом случае U = Pn(x);

II класс – это интегралы вида:

1.∫Pn(x) · ln(a·x) dx;

2**.∫** Pn(x) · arcsin(x) dx;

3**.∫** Pn(x) · arctg(x) dx , где в качестве 1.U = ln(a·x); 2.U = arcsin(x); 3.U = arctg(x);

Пример: интеграл вида:

**∫** ex · sin(x) dx = | U = ex; dU= exdx; dV= sin(x) dx; V=**∫**sin(x) dx = –cos(x); | = –ex · cos(x) + ex · sin(x) – **∫** ex · sin(x) dx = –ex · cos(x) + ex · sin(x) – **∫** ex · sin(x) dx;

получили уравнение относительно интеграла, неизвестным является интеграл.

2 **∫** ex · sin(x) dx = ex · (sin(x) – cos(x) );

**∫** ex · sin(x) dx = · ex · (sin(x) – cos(x) ) + C;

**Определение определенного интеграла.**

1. Разобьем отрезок [a,b] на n частей точками a = xo < x1 < x2 <…< xi <..< xn = b.

2. В каждом частичном отрезке [ Xi-1, Xi ] длиной Δхi выберем произвольные точки ƒ(ζi) (i=1,n )
3. Найдем значение функции в этих точках ƒ(ζi).

4. Найдем сумму - интегральная сумму.

*Каждая сумма зависит от выбора точки и от способа разбиения отрезка на части. Разбивая произвольные образом отрезок на части и выбирая различные точки, получаем последовательность интегральных сумм.*

*Определение*: Если существует предел последовательности интегральных сумм, независящей от выбора точки и от способа разбиения отрезка на части, то он называется определенным интегралом от функции ƒ(х) на отрезке [a,b] и обозначается , итак по орпеделению1: , тогда площадь криволинейной трапеции: Sкр.тр.= .

*Определение*: Функция называется интегрируемой на отрезке [a,b], если существует определенный интеграл от этой функции на этом отрезке.

***Пример:*** 1. = π;

2. arctg(x) | = arctg1 – arctg(-1) = 2arctg1 = 2π/4 = π/2.

3. = | x = sin(t), = cos(t), dx = cos(t)dt, при х=0, t=0; при х=1, t = π/2 | = = = = +0 – 0 = .

**Площадь плоской фигуры.**

Ранее было установлено, что площадь криволинейной трапеции есть: S = , из свойства определенного интеграла видно, что ƒ(х) ≥ 0, то ≥ 0,

т.е. S ≥ 0; если ƒ(х) ≤ 0 , то ≤ 0, то S = ││;

 y S = S1 + |S2 | + S3.

 s1 s3

 s2 x

***Пример:*** найти площадь фигуры, ограниченной осью Ох и кривой y=cos(x) , где x=0, x=π.

 1

 S1 π

 0 x

 S2

S1 = = 1; S2 = = –1 ; S = S1 + | S2| = 1 + 1 = 2.

**Объем тела вращения.**

 Дана криволинейная трапеция, ограниченная прямыми x = a, x = b, осью Ох и кривой y=ƒ(x). Эта трапеция вращается вокруг оси Ох. В результате получили тело.

 Сечение этого тела в каждой точке есть

y круг с радиусом ƒ(x).

 y=ƒ(x) Значит площадь такого сечения

 Q(x) = πy2 = πƒ2 (x).

 ƒ(x) Объем этого тела равен:

 a x b

 x **Vox =  πy2dx = π y2dx.**

Аналогично находится площадь фигуры с осью Оу.

 Фигура ограничена линиями c и d, осью Оу и

 у x = ƒ(y).

 **Voy = π  x2dy.**

 x

Пример: найти объем тела, полученного вращением эллипса вокруг оси Ox.

; V = 2πy2dx ;

 y

 b

 -a a x

 -b

y2 = b2 (1 - ); V = 2π b2 (1 – )dx = 2π b2 (x – ) = 2π b2(a –) =;

Преподаватель Науразова Л.А