Дата: 18.12.2020г.

Группа: 19-ИСиП-1д

Наименование дисциплины/МДК: Элементы высшей математики

Тема: Функциональные последовательности и ряды.

Функциональные последовательности.

**Определение.** Если членами ряда будут не числа, а функции от *х*, то ряд называется **функциональным**.

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной *х* сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной *х*, при которых ряд сходится.

Совокупность таких значений называется **областью сходимости**.

Так как пределом каждой функции, входящей в область сходимости ряда, является некоторое число, то пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция:



**Определение.** Последовательность {*fn(x)*} **сходится** к функции *f(x)* на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 и любой точки *х* из рассматриваемого отрезка существует номер N = N(ε, x), такой, что неравенство



выполняется при n>N.

При выбранном значении ε>0 каждой точке отрезка [a,b] соответствует свой номер и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка [a,b], будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка [a,b], т.е. будет общим для всех точек.

**Определение.** Последовательность {*fn(x)*} **равномерно сходится** к функции *f(x)* на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 существует номер N = N(ε), такой, что неравенство



выполняется при n>N для всех точек отрезка [a,b].

Пример. Рассмотрим последовательность 

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции *f(x)=0*, т.к.



Построим графики этой последовательности:

sinx 



Как видно, при увеличении числа *n* график последовательности приближается к оси *х*.

Функциональные ряды.

**Определение.** **Частными (частичными) суммами** функционального ряда  называются функции 

**Определение.** Функциональный ряд называется **сходящимся** в точке (*х=х0*), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности  называется **суммой** ряда  в точке *х0*.

**Определение.** Совокупность всех значений *х*, для которых сходится ряд называется **областью сходимости** ряда.

**Определение.** Ряд называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

**Теорема.** (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

*Для равномерной сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при n>N и любом целом p>0 неравенство*

**

*выполнялось бы для всех х на отрезке [a,b].*

**Теорема.** (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

*Ряд сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :*

**

*т.е. имеет место неравенство:*

*.*

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд  **мажорируется** числовым рядом .

Пример. Исследовать на сходимость ряд .

Так как  всегда, то очевидно, что .

При этом известно, что общегармонический ряд  при α=3>1 сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

Пример. Исследовать на сходимость ряд .

На отрезке [-1,1] выполняется неравенство  т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах (-∝, -1) ∪ (1, ∝) расходится.

Свойства равномерно сходящихся рядов.

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

*Если члены ряда  - непрерывные на отрезке [a,b] функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма S(x) есть непрерывная функция на отрезке [a,b].*

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

*Равномерно сходящийся на отрезке [a,b] ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку [a,b] , сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку*.



3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

*Если члены ряда  сходящегося на отрезке [a,b] представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*



На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной *х*, можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд.

**Контрольные вопросы:**

1) Дайте определение функционального ряда.

2) Дайте определения частичной суммы функционального ряда.

3) Перечислите свойства равномерно сходящихся рядов.

Преподаватель Х.Ш. Сулиманова