Дата: **09.12.2020**

Группа: **20-ПСО-2д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Существование предела монотонной ограниченной последовательности.**

**Определение** Последовательность (уn) называют возрастающей, если каждый ее член (начиная со второго) больше предыдущего, т. е. уn+1 > уn для n ≥ 1.

**Определение** Последовательность (уn) называют убывающей, если каждый ее член (начиная со второго) меньше предыдущего, т. е. yn+1 < уn для n ≥> 1.

**Пример**

Определим монотонность последовательности http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2034.jpg

Запишем (n + 1)-й член последовательности: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2035.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2036.jpg Найдем разность двух соседних членов:       http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2037.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2038.jpg Так как n- натуральное число, то при всех n дробь http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2039.jpg положительна. Поэтому уn+1 – уn > 0 или уn+1 > уn при всех n. Тогда по определению данная последовательность (уn) возрастающая.

Заметим, что последовательность уn = an при a > 1 возрастает, при 0 < a < 1 убывает.

**Предел последовательности**

Введем еще одно важнейшее понятие - предел последовательности.

**Определение** . Число b называют пределом последовательности (уn), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера N. В этом случае пишут: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2040.jpg  (читают: предел последовательности (уn) при стремлении n к бесконечности равен b, при этом часто фразу «при стремлении n к бесконечности» опускают). Используют и такую запись: уn → b(читают: уn стремится к b, или уn сходится к b).

Разъясним понятие «окрестность точки b». Под ним понимают интервал (b - r; b + r), где r - радиус окрестности (r > 0).

**Пример**

Покажем, что http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2041.jpg

Прежде всего отметим, что понятие предела последовательности очень сложное и с трудом воспринимается даже студентами. Поэтому подробно будем разбираться с этим примером (буквально по пунктам).

1. В данном случае число b = 0. Выберем произвольный радиус r окрестности точки b(обычно r выбирают небольшим и r > 0). Поэтому будем рассматривать интервал (0 - r; 0 + r) или (-r; r).

2. Нужно найти номер N, начиная с которого все члены последовательности уn = 2/nбудут находиться в интервале (-r; r). Другими словами, надо относительно n решить неравенство –r < 2/n < r.

3. Очевидно, что левая часть неравенства -r < 2/n выполняется при всех натуральныхn. Решим правую часть неравенства 2/n < r. Получим 2 < nr, откуда n > 2/r. Итак, при n > 2/n все члены последовательности уn отличаются от своего предела в менее чем на r.

4. Сделаем оценки. При r = 0,1 получаем n > 20 (т. е. начиная с номера N = 21 все члены последовательности отличаются от предела не более чем на 0,1). При r = 0,01 имеем n > 200 (т. е. начиная с номера N = 201 все члены последовательности отличаются от предела не более чем на 0,01) и т. д. На рисунке приведена графическая иллюстрация для этого случая.

http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2042.jpg

Видно, что в r-окрестности предела собирается (сгущается) бесконечное множество членов последовательности, вне этой окрестности находится только конечное число членов.

Если последовательность (уn) имеет предел, то говорят, что она сходится, если не имеет предела - то расходится.

Теоремы о пределах и вычисление пределов последовательностей

Приведем формулировки теорем о пределах последовательностей.

Теорема 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

Теорема 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Теорема 3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Теорема 4. Если http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2043.jpg то:

1) предел суммы равен сумме пределов: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2044.jpg

2) предел произведения равен произведению пределов: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2045.jpg

3) предел частного равен частному пределов: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2046.jpg

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2047.jpg

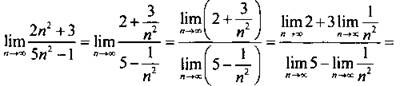
Теорема 4 используется при вычислении пределов последовательностей.

**Пример**

Найдем пределы последовательностей: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2048.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2049.jpg

а) Используем теоремы 2 и 4 и получим: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2050.jpg

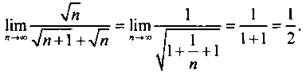
б) Применим теоремы 1 и 4. Имеем: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2051.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2052.jpg

в) Заметим, что сразу использовать теорему 3 нельзя, так как числитель 2n2 + 3 и знаменатель 5n2 - 1 дроби бесконечно большие величины и получаем что-то непонятное: ∞/∞. Поэтому разделим числитель и знаменатель дроби на n2 и используем теоремы 1, 3 и 4. Получим: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2054.jpg

г) Опять же сразу применять теоремы 3 и 1 нельзя. Тогда получим: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2055.jpg Каждое слагаемое в этой сумме стремится к нулю (http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2056.jpg), но в эту сумму входят n слагаемых, т. е. бесконечно большая величина.

Получаем опять нечто непонятное: 0 · ∞.

Учтем, что числитель дроби является суммой арифметической прогрессии и используем    теоремы 1, 3, 4. Имеем: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2057.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2058.jpg

д) При n → ∞ множитель http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2059.jpg множитель http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2060.jpg Возникает опять что-то непонятное: ∞ · 0. Поэтому умножим и разделим данное выражение на http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2061.jpg и применим теоремы 1, 3, 4. Получаем: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2062.jpg

Таким образом, вычисление пределов последовательностей несложно, но необходимо проявлять внимание и аккуратность. При больших значениях n члены последовательности практически равны ее пределу.

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение последовательности.

2. Монотонность последовательности.

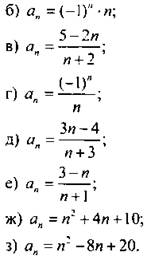
3. Определение предела последовательности.

4. Теоремы о пределах последовательности.

**Задание на дом**

  Определите монотонность последовательности (аn):

http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image2066.jpg



Преподаватель Науразова Л.А