Дата: **16.12.2020**

Группа: **19-ЭК-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Интегрирование неограниченных функций.**

При введении понятия определённого интеграла https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image431.gif предполагалось, что выполняются следующие два условия:

а) пределы интегрирования а и https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image432.gif являются конечными;

б) подынтегральная функция https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image434.gif ограничена на отрезке https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image008.gif .

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то интеграл называется **несобственным.**

Рассмотрим вначале несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

**Определение.** Пусть функция https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image377.gif определена и непрерывна на промежутке https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image436.gif , тогда

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image438.gif (1)

называется **несобственным интегралом** с бесконечным верхним пределом интегрирования (несобственным интегралом I рода).

Если https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image440.gif существует и конечен, то несобственный интеграл https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image431.gif называется **сходящимся**; если данный предел не существует или равен https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image441.gif , то несобственный интеграл называется **расходящимся**.

Геометрически несобственный интеграл https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image443.gif от неотрицательной функции https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image445.gif выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image377.gif , снизу – осью https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image249.gif , слева – отрезком прямой https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image446.gif и неограниченной справа (рис. 1).

Если несобственный интеграл сходится, то эта площадь является конечной; если несобственный интеграл расходится, то эта площадь бесконечна.

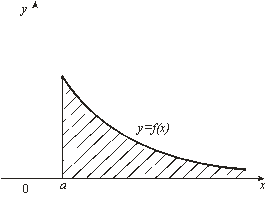


Рис. 1

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования:

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image449.gif . (2)

Этот интеграл сходится, если предел в правой части равенства (2) существует и конечен; в противном случае интеграл называется расходящимся.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования определяется следующим образом:

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image451.gif , (3)

где с – любая точка интервала https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image453.gif . Интеграл https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image455.gif сходится только в том случае, когда сходятся оба интеграла в правой части равенства (3).

**Пример 1.** Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image457.gif ; б) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image459.gif ; в) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image461.gif ; г) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image463.gif .

Решение. а) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image465.gif https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image467.gif , следовательно, данный интеграл расходится;

б) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image469.gif

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image471.gif . Так как при https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image473.gif предел https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image475.gif не существует, то интеграл https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image477.gif расходится;

в) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image479.gif

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image481.gif Значит, несобственный интеграл https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image461.gif сходится и его значение равно https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image483.gif ;

г) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image485.gif = [выделим в знаменателе полный квадрат: https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image487.gif ] = https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image489.gif [замена: https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image491.gif

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image493.gif ] = https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image495.gif

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image497.gif https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image499.gif

Значит, несобственный интеграл сходится и его значение равно https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image501.gif .

Пусть функция https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image377.gif непрерывна на конечном промежутке https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image503.gif , но не ограничена на этом промежутке.

**Определение.** Несобственным интегралом https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image431.gif от функции у=f(x) на промежутке https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image505.gif называется предел https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image507.gif , т.е.

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image509.gif . (1)

Если предел, стоящий в правой части равенства (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Интеграл (1) иногда **называют несобственным интегралом второго рода.**

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image377.gif непрерывной, но не ограниченной на промежутке https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image511.gif :

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image513.gif . (2)

Если функция https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image377.gif не ограничена при https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image514.gif , где https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image516.gif , и непрерывна при https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image518.gif и https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image520.gif , то несобственный интеграл от функции у=f(x) на отрезке https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image522.gif обозначается https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image524.gif и определяется равенством

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image526.gif . (3)

**Несобственный интеграл (3) называется сходящимся, если сходятся оба несобственных интеграла в правой части равенства (3).  
В противном случае данный интеграл называется расходящимся.**

**Пример 1.** Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image528.gif ; б) https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image530.gif .

Решение: а) данный интеграл является интегралом от неограниченной функции (подынтегральная функция https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image532.gif не определена в точке https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image357.gif , при https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image534.gif эта функция неограниченно возрастает).

По определению имеем

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image536.gif [замена: https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image538.gif https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image540.gif ] = https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image542.gif https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image544.gif , следовательно, данный интеграл сходится.

б) по определению

https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image546.gif  
https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image548.gif https://www.ok-t.ru/studopediaru/baza8/316472526336.files/image550.gif .

Значит, данный интеграл является расходящимся.

**Контрольные вопросы**

1. Какой интеграл называется собственным?

2.Какой интеграл называется несобственным?

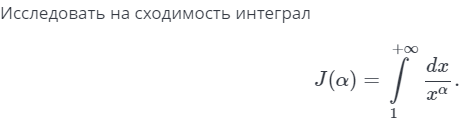
3. Какой интеграл называется сходящимся?

4.Какой интеграл называется расходящимся?

Домашнее задание:







Преподаватель Науразова Л.А