Дата: **16.12.2020**

Группа: **19-ЭК-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Интегрирование неограниченных функций.**

При введении понятия определённого интеграла  предполагалось, что выполняются следующие два условия:

а) пределы интегрирования а и  являются конечными;

б) подынтегральная функция  ограничена на отрезке  .

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то интеграл называется **несобственным.**

Рассмотрим вначале несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

**Определение.** Пусть функция  определена и непрерывна на промежутке  , тогда

 (1)

называется **несобственным интегралом** с бесконечным верхним пределом интегрирования (несобственным интегралом I рода).

Если  существует и конечен, то несобственный интеграл  называется **сходящимся**; если данный предел не существует или равен  , то несобственный интеграл называется **расходящимся**.

Геометрически несобственный интеграл  от неотрицательной функции  выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции  , снизу – осью  , слева – отрезком прямой  и неограниченной справа (рис. 1).

Если несобственный интеграл сходится, то эта площадь является конечной; если несобственный интеграл расходится, то эта площадь бесконечна.



Рис. 1

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования:

 . (2)

Этот интеграл сходится, если предел в правой части равенства (2) существует и конечен; в противном случае интеграл называется расходящимся.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования определяется следующим образом:

 , (3)

где с – любая точка интервала  . Интеграл  сходится только в том случае, когда сходятся оба интеграла в правой части равенства (3).

**Пример 1.** Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а)  ; б)  ; в)  ; г)  .

Решение. а)   , следовательно, данный интеграл расходится;

б) 

 . Так как при  предел  не существует, то интеграл  расходится;

в) 

 Значит, несобственный интеграл  сходится и его значение равно  ;

г)  = [выделим в знаменателе полный квадрат:  ] =  [замена: 

 ] = 

 

Значит, несобственный интеграл сходится и его значение равно  .

Пусть функция  непрерывна на конечном промежутке  , но не ограничена на этом промежутке.

**Определение.** Несобственным интегралом  от функции у=f(x) на промежутке  называется предел  , т.е.

 . (1)

Если предел, стоящий в правой части равенства (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Интеграл (1) иногда **называют несобственным интегралом второго рода.**

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции  непрерывной, но не ограниченной на промежутке  :

 . (2)

Если функция  не ограничена при  , где  , и непрерывна при  и  , то несобственный интеграл от функции у=f(x) на отрезке  обозначается  и определяется равенством

 . (3)

**Несобственный интеграл (3) называется сходящимся, если сходятся оба несобственных интеграла в правой части равенства (3).
В противном случае данный интеграл называется расходящимся.**

**Пример 1.** Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а)  ; б)  .

Решение: а) данный интеграл является интегралом от неограниченной функции (подынтегральная функция  не определена в точке  , при  эта функция неограниченно возрастает).

По определению имеем

 [замена:   ] =   , следовательно, данный интеграл сходится.

б) по определению


  .

Значит, данный интеграл является расходящимся.

**Контрольные вопросы**

1. Какой интеграл называется собственным?

2.Какой интеграл называется несобственным?

3. Какой интеграл называется сходящимся?

4.Какой интеграл называется расходящимся?

Домашнее задание:







Преподаватель Науразова Л.А