Дата: **22.12.2020**

Группа: **19-ЭК-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Практическое занятие «Исследование сходимости (расходимости) интегралов»**

Напомним основные типы несобственных интегралов:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image002.gif – *несобственные интегралы 1-го рода*;

http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image004.gif – *несобственные интегралы 2-го рода*, в которых функция http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image006.gif терпит [**бесконечный разрыв**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) в точке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image008.gif и / или http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image010.gif или в промежуточных точках отрезка http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image012.gif.

Предположим, что нам дан произвольный несобственный интеграл. **В чём состоит сегодняшняя задача?** Задача состоит в том, чтобы выяснить, сходится ли (в принципе) данный интеграл или нет.

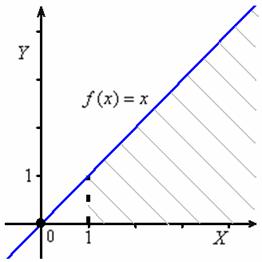
**Зачем это нужно?** Ну, во-первых, иногда бывает полезно сразу выяснить это вопрос. Во-вторых, рассмотрим, например, такие несобственные интегралы:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image014.gif

Здесь соответствующие [**неопределенные интегралы**](http://mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html) являются *неберущимися*, и поэтому решить данные примеры [**обычным способом**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html) невозможно. Но можно выяснить, сходятся ли эти интегралы или расходятся.

Вопрос третий: **как определить, сходится ли несобственный интеграл или нет?**

Начнём с [**несобственных интегралов 1-го рода**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html), и сразу **очевидный признак:**

Если подынтегральная функцияhttp://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image006_0000.gif [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image016.gif и *не ограничена* сверху и/или снизу при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image018.gif, то несобственный интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image020.gif расходится.

Пожалуйста: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image022.gif. Вспоминаем «школьный» [**график прямой пропорциональности**](http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image024.gif.   
  
При http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image028.gif этот график  уходит вверх на плюс бесконечность, и совершенно понятно, что площадь под ним *(серая штриховка)* бесконечна: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image030.gif.

То же самое справедливо и для «страшных» интегралов наподобие http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image032.gif, которые на самом деле ничуть не страшнЫ. Во-первых, отмечаем [**непрерывность**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) подынтегральной функции на промежутке интегрирования, и, во-вторых, выясняем [**порядок роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html) числителя и знаменателя – этим мы уже занимались, когда находили [**пределы функций**](http://mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html). В числителе МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые под корнем: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image034.gif и константу-множитель: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image036.gif, следовательно, старшая степень числителя равна http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image038.gif! В знаменателе тоже отбрасываем все младшие слагаемые: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image040.gif, следовательно, старшая степень знаменателя равна 2.

Неравенство http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image042.gif говорит нам о том,  что числитель [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем знаменатель, а значит, http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image044.gif. То есть, при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image028_0000.gif подынтегральная функция не ограничена сверху и площадь под графиком данной функции на промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image046.gif – бесконечна: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image048.gif.

Актуализируем ещё пару важных фактов о порядке роста. Рассмотрим следующие несобственные интегралы от непрерывных на промежутке интегрирования функций:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image050.gif

При http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image028_0001.gif показательная функция http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image053.gif с основанием http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image055.gif [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем любая степенная функция http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image057.gif. Поэтому http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image059.gif и соответствующий несобственный интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image061.gif – расходится. Подчёркиваю, что в знаменателе может стоять «икс» хоть в сотой, хоть в тысячной степени, суммы степенных функций – результат от этого не изменится: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image063.gif. В справедливости предела http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image065.gif можно убедиться, применив [**правило Лопиталя**](http://mathprofi.ru/pravila_lopitalya.html) :)

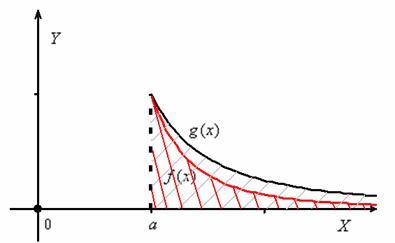
Второе. При http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image028_0002.gif степенная функция http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image057_0000.gif – [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем натуральный логарифм, таким образом, функция http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image068.gif (не ограничена сверху) и соответствующий несобственный интеграл расходится: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image070.gif.

Возьмите на заметку эту информацию, она нам потребуется в будущем, в том числе самом близком.

Как ведёт себя интеграл, если подынтегральная функция *ограничена*? На всякий случай приведу яркие примеры ограниченных функций, вдруг у кого недопонимание этого термина: [**экспонента**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image072.gif – ограничена осью абсцисс снизу; [**синус**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html):  http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image074.gif, [**арктангенс**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html): http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image076.gif – ограничены и сверху, и снизу.

**Если функция ограничена** сверху и/или снизу **на некотором промежутке, то мы ничего не можем сказать о сходимости интеграла на данном промежутке** – он может, как сходиться, так и расходиться.

**Признак сравнения:** пусть две [***неотрицательные***](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) функции http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image078.gif [**непрерывны**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image016_0000.gif, и для всех http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image080.gif этого промежутка справедливо неравенство http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image082.gif. Тогда из сходимости интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image084.gif следует сходимость интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image086.gif, а из расходимости http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image086_0000.gif следует расходимость интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image084_0000.gif.

1) Пусть несобственный интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image084_0001.gif сходится. Тогда площадь, заштрихованная на чертеже серым цветом, будет *конечна*.  В силу условия http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image082_0000.gif график функции http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image006_0001.gif *(красная линия)*расположен *не выше* графика http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image090.gif и  интегралу http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image086_0001.gif соответствует «красная» площадь, которая является ЧАСТЬЮ *конечной* «серой» площади. Следовательно, «красная» площадь тоже конечна, то есть несобственный интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image020_0000.gif – сходится:  
  
2) Ситуация вторая: пусть на том же промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image096.gif интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image020_0001.gif расходится. Это означает, что «красная» площадь *бесконечна*. А коль скоро, она является частью «серой» площади, то интегралу http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image084_0002.gif ничего не остаётся делать, как тоже расходиться.

Такой же признак можно сформулировать для интегралов  http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image099.gif и, кроме того, для [***неположительных***](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) функций, удовлетворяющих условию http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image101.gif, чертёж в последнем случае [**отобразится в нижнюю полуплоскость, симметрично относительно оси**](http://mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii.html#6) http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image103.gif. Признаки сравнения для этих случаев сформулируйте и осознайте самостоятельно. На практике такие примеры встречаются, и они не должны поставить вас в тупик!

Но в первую очередь, конечно, традиционные примеры:

В начале вводного урока о [**несобственных интегралах**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html) мы установили сходимость интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image105.gif. Теперь поставим задачу исследовать сходимость интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image107.gif.

Подчёркиваю, что **решать его не нужно** *(хотя делается это легко)* – а нужно выяснить, сходится ли он (в принципе)  или нет.  
Прежде всего, обратим внимание, что функция http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image109.gif непрерывна и *ограничена* на промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image046_0000.gif, все её значения «сидят» в полуинтервале http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image112.gif. Но, как отмечалось выше, пробуем использовать признак сравнения. Сравнивать будем с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image105_0000.gif, сходимость которого уже установлена.

На промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image046_0001.gif функции http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image114.gif  непрерывны.

Строго положительны: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image116.gif. Очень хорошо – условия признака выполнены, и поэтому можно приступать к анализу самих функций.

Для ВСЕХ http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image080_0000.gif из данного промежутка справедливо очевидное неравенство:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image119.gif

а большим знаменателям соответствуют меньшие дроби:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image121.gif

**В случае сомнений всегда можно взять несколько значений «икс»** *(проще всего целых)* **и расписать несколько неравенств подробно**, чтобы убедиться в своей правоте или неправоте. В нашем случае:

если http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image123.gif, то http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image125.gif;  
если http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image127.gif, то http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image129.gif;  
если http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image131.gif, то http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image133.gif;  
Если http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image135.gif, то http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image137.gif;  
….  
и теперь-то уж совершенно понятно, что для всех http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image080_0001.gif из промежутка http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image046_0002.gif неравенство http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image121_0000.gif действительно справедливо.

Таким образом, по признаку сравнения интеграл http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image107_0000.gif сходится *(равен конечному числу)* вместе с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image105_0001.gif. Кстати, на чертеже выше изображен именно графики функций http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image141.gif.  
  
С помощью признака сравнения легко установить, что интеграл вида http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image143.gif сходится при  http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image145.gif и расходится, если http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image147.gif, а при http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image149.gif он будет очевидно расходящимся.

Так, например, интегралы http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image151.gif – сходятся, а http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image153.gif – расходятся

Это семейство «эталонных» интегралов активно используется в практических заданиях, причём, опционально нижний предел интегрирования может быть и другим, например: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image155.gif – зависит от того, какой интеграл предложен для исследования.

Пример 1

Исследовать сходимость интеграла http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image157.gif

**Решение:** данный [**биномиальный интеграл**](http://mathprofi.ru/integrirovanie_kornei.html) является *неберущимся*, но есть возможность выяснить, сходится он или нет. Во-первых, отмечаем, что подынтегральная функция [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image046_0003.gif и ограничена на нём, ибо предел *http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image159.gif* – равен *конечному* числу *(в общем случае не обязательно нулю)*. Таким образом, отделаться «малой кровью» у нас не получилось и решение продолжается.

По «общим очертаниям» предложенный  интеграл напоминает сходящийся «эталон» http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image161.gif. На промежутке http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image163.gif:

http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image165.gif, http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image167.gif, а вот дела с дробями обстоят ровно наоборот – по той причине, что дробь с большим знаменателем является меньшей:

http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image169.gif, таким образом, по признаку сравнения исследуемый интеграл сходится вместе с интегралом http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image161_0000.gif.

**Ответ:** сходится

Подобных примеров можно придумать очень много: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image171.gif – сравниваем с соответствующими сходящимися интегралами http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image173.gif.

 Как вариант, знаменатель может быть «утяжелён» какой-нибудь возрастающей функцией – «иксом» в положительной степени, логарифмом, экспонентой: http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image175.gif и т.д.

Все эти интегралы исследуются по той же схеме, единственное, здесь появляется дополнительная строчка в решении. Так, например, если в разобранном примере:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image167_0000.gif, то, домножая левую часть на http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image177.gif, мы *только её увеличим*, и поэтому неравенство:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image179.gif будет выполнено.

Следовательно:  
http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image181.gif, и по признаку сравнения, интеграл  http://mathprofi.ru/s/kak_issledovat_shodimost_nesobstvennogo_integrala_clip_image183.gif тоже сходится.

Преподаватель Науразова Л.А.