Дата: **22.12.2020**

Группа: **19-ЭК-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Практическое занятие «Исследование сходимости (расходимости) интегралов»**

Напомним основные типы несобственных интегралов:
 – *несобственные интегралы 1-го рода*;

 – *несобственные интегралы 2-го рода*, в которых функция  терпит [**бесконечный разрыв**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) в точке  и / или  или в промежуточных точках отрезка .

Предположим, что нам дан произвольный несобственный интеграл. **В чём состоит сегодняшняя задача?** Задача состоит в том, чтобы выяснить, сходится ли (в принципе) данный интеграл или нет.

**Зачем это нужно?** Ну, во-первых, иногда бывает полезно сразу выяснить это вопрос. Во-вторых, рассмотрим, например, такие несобственные интегралы:


Здесь соответствующие [**неопределенные интегралы**](http://mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html) являются *неберущимися*, и поэтому решить данные примеры [**обычным способом**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html) невозможно. Но можно выяснить, сходятся ли эти интегралы или расходятся.

Вопрос третий: **как определить, сходится ли несобственный интеграл или нет?**

Начнём с [**несобственных интегралов 1-го рода**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html), и сразу **очевидный признак:**

Если подынтегральная функция [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке  и *не ограничена* сверху и/или снизу при , то несобственный интеграл  расходится.

Пожалуйста: . Вспоминаем «школьный» [**график прямой пропорциональности**](http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) .

При  этот график  уходит вверх на плюс бесконечность, и совершенно понятно, что площадь под ним *(серая штриховка)* бесконечна: .

То же самое справедливо и для «страшных» интегралов наподобие , которые на самом деле ничуть не страшнЫ. Во-первых, отмечаем [**непрерывность**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) подынтегральной функции на промежутке интегрирования, и, во-вторых, выясняем [**порядок роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html) числителя и знаменателя – этим мы уже занимались, когда находили [**пределы функций**](http://mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html). В числителе МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые под корнем:  и константу-множитель: , следовательно, старшая степень числителя равна ! В знаменателе тоже отбрасываем все младшие слагаемые: , следовательно, старшая степень знаменателя равна 2.

Неравенство  говорит нам о том,  что числитель [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем знаменатель, а значит, . То есть, при  подынтегральная функция не ограничена сверху и площадь под графиком данной функции на промежутке  – бесконечна: .

Актуализируем ещё пару важных фактов о порядке роста. Рассмотрим следующие несобственные интегралы от непрерывных на промежутке интегрирования функций:


При  показательная функция  с основанием  [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем любая степенная функция . Поэтому  и соответствующий несобственный интеграл  – расходится. Подчёркиваю, что в знаменателе может стоять «икс» хоть в сотой, хоть в тысячной степени, суммы степенных функций – результат от этого не изменится: . В справедливости предела  можно убедиться, применив [**правило Лопиталя**](http://mathprofi.ru/pravila_lopitalya.html) :)

Второе. При  степенная функция  – [**более высокого порядка роста**](http://mathprofi.ru/metody_resheniya_predelov_neopredelennosti.html), чем натуральный логарифм, таким образом, функция  (не ограничена сверху) и соответствующий несобственный интеграл расходится: .

Возьмите на заметку эту информацию, она нам потребуется в будущем, в том числе самом близком.

Как ведёт себя интеграл, если подынтегральная функция *ограничена*? На всякий случай приведу яркие примеры ограниченных функций, вдруг у кого недопонимание этого термина: [**экспонента**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)  – ограничена осью абсцисс снизу; [**синус**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html):  , [**арктангенс**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html):  – ограничены и сверху, и снизу.

**Если функция ограничена** сверху и/или снизу **на некотором промежутке, то мы ничего не можем сказать о сходимости интеграла на данном промежутке** – он может, как сходиться, так и расходиться.

**Признак сравнения:** пусть две [***неотрицательные***](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) функции  [**непрерывны**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке , и для всех  этого промежутка справедливо неравенство . Тогда из сходимости интеграла  следует сходимость интеграла , а из расходимости  следует расходимость интеграла .

1) Пусть несобственный интеграл  сходится. Тогда площадь, заштрихованная на чертеже серым цветом, будет *конечна*.  В силу условия  график функции  *(красная линия)*расположен *не выше* графика  и  интегралу  соответствует «красная» площадь, которая является ЧАСТЬЮ *конечной* «серой» площади. Следовательно, «красная» площадь тоже конечна, то есть несобственный интеграл  – сходится:

2) Ситуация вторая: пусть на том же промежутке  интеграл  расходится. Это означает, что «красная» площадь *бесконечна*. А коль скоро, она является частью «серой» площади, то интегралу  ничего не остаётся делать, как тоже расходиться.

Такой же признак можно сформулировать для интегралов   и, кроме того, для [***неположительных***](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) функций, удовлетворяющих условию , чертёж в последнем случае [**отобразится в нижнюю полуплоскость, симметрично относительно оси**](http://mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii.html#6) . Признаки сравнения для этих случаев сформулируйте и осознайте самостоятельно. На практике такие примеры встречаются, и они не должны поставить вас в тупик!

Но в первую очередь, конечно, традиционные примеры:

В начале вводного урока о [**несобственных интегралах**](http://mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html) мы установили сходимость интеграла . Теперь поставим задачу исследовать сходимость интеграла .

Подчёркиваю, что **решать его не нужно** *(хотя делается это легко)* – а нужно выяснить, сходится ли он (в принципе)  или нет.
Прежде всего, обратим внимание, что функция  непрерывна и *ограничена* на промежутке , все её значения «сидят» в полуинтервале . Но, как отмечалось выше, пробуем использовать признак сравнения. Сравнивать будем с интегралом , сходимость которого уже установлена.

На промежутке  функции   непрерывны.

Строго положительны: . Очень хорошо – условия признака выполнены, и поэтому можно приступать к анализу самих функций.

Для ВСЕХ  из данного промежутка справедливо очевидное неравенство:


а большим знаменателям соответствуют меньшие дроби:


**В случае сомнений всегда можно взять несколько значений «икс»** *(проще всего целых)* **и расписать несколько неравенств подробно**, чтобы убедиться в своей правоте или неправоте. В нашем случае:

если , то ;
если , то ;
если , то ;
Если , то ;
….
и теперь-то уж совершенно понятно, что для всех  из промежутка  неравенство  действительно справедливо.

Таким образом, по признаку сравнения интеграл  сходится *(равен конечному числу)* вместе с интегралом . Кстати, на чертеже выше изображен именно графики функций .

С помощью признака сравнения легко установить, что интеграл вида  сходится при   и расходится, если , а при  он будет очевидно расходящимся.

Так, например, интегралы  – сходятся, а  – расходятся

Это семейство «эталонных» интегралов активно используется в практических заданиях, причём, опционально нижний предел интегрирования может быть и другим, например:  – зависит от того, какой интеграл предложен для исследования.

Пример 1

Исследовать сходимость интеграла 

**Решение:** данный [**биномиальный интеграл**](http://mathprofi.ru/integrirovanie_kornei.html) является *неберущимся*, но есть возможность выяснить, сходится он или нет. Во-первых, отмечаем, что подынтегральная функция [**непрерывна**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на промежутке  и ограничена на нём, ибо предел ** – равен *конечному* числу *(в общем случае не обязательно нулю)*. Таким образом, отделаться «малой кровью» у нас не получилось и решение продолжается.

По «общим очертаниям» предложенный  интеграл напоминает сходящийся «эталон» . На промежутке :

, , а вот дела с дробями обстоят ровно наоборот – по той причине, что дробь с большим знаменателем является меньшей:

, таким образом, по признаку сравнения исследуемый интеграл сходится вместе с интегралом .

**Ответ:** сходится

Подобных примеров можно придумать очень много:  – сравниваем с соответствующими сходящимися интегралами .

 Как вариант, знаменатель может быть «утяжелён» какой-нибудь возрастающей функцией – «иксом» в положительной степени, логарифмом, экспонентой:  и т.д.

Все эти интегралы исследуются по той же схеме, единственное, здесь появляется дополнительная строчка в решении. Так, например, если в разобранном примере:
, то, домножая левую часть на , мы *только её увеличим*, и поэтому неравенство:
 будет выполнено.

Следовательно:
, и по признаку сравнения, интеграл   тоже сходится.

Преподаватель Науразова Л.А.