**Дата 21.01.2021**

**Группа 20-ЭК-1д**

**Дисциплина Математика**

Мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах является определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа. Геометрический смысл интеграла – площадь криволинейной трапеции. Физический смысл интеграла – 1) масса неоднородного стержня с плотностью, 2) перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью за промежуток времени.

Учитель: Ребята нашего класса провели большую работу, они подобрали задачи, где применяется определенный интеграл. Им слово.

1 ученик: [**Из истории интегрального исчисления.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril1.docx)

2 ученик: Свойства интеграла



3 ученик: Применение интеграла (на магнитной доске таблица).

|  |
| --- |
| *img2.gif (4948 bytes) при https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image307.gif .* |
| ***Математика***1. Вычисления Sфигур.
2. Длина дуги кривой.
3. Vтела на S параллельных сечений.
4. V тела вращения и т.д.
 | ***Физика***1. Работа *А* переменной силы.
2. S – (путь) перемещения.
3. Вычисление массы.
4. Вычисление момента инерции линии, круга, цилиндра.
5. Вычисление координаты центра тяжести.
6. Количество теплоты и т.д.
 |

4 ученик: Рассматриваем применение интеграла в математике для вычисления площади фигур.

Площадь всякой плоской фигуры, рассматриваемая в прямоугольной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилежащих к оси *Ох* и оси *Оу.* Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *у = f(х),* осью *Ох* и двумя прямыми *х=а* и *х=b,* где *а  х  b*, *f(х)  0* вычисляется по формуле  см. [**рис.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril3.docx) Если криволинейная трапеция прилегает к оси *Оу*, то её площадь вычисляется по формуле , см. [**рис.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril4.docx) При вычислении площадей фигур могут представиться следующие случаи: а)Фигура расположена над осью Ох и ограничена осью Ох, кривой у=f(х) и двумя прямыми х=а и х=b.(См. [**рис.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril5.docx)) Площадь этой фигуры находится по формуле 1 или 2. б) Фигура расположена под осью Ох и ограничена осью Ох, кривой у=f(х) и двумя прямыми х=а и х=b (см. [**рис.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril6.docx)). Площадь находится по формуле . в) Фигура расположена над и под осью Ох и ограничена осью Ох, кривой у=f(х) и двумя прямыми х=а и х=b([**рис.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril7.docx)). г) Площадь ограничена двумя пересекающимися кривыми у=f(х) и у = (х) ([**рис.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril8.docx))

5 ученик: Решим задачу

*х-2у+4=0 и х+у-5+0 и у=0*



 

6 ученик[**: Вычисление объемов тел.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril2.docx)

7 ученик: Интеграл, широко применяющийся в физике. Слово физикам.

### 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПУТИ, ПРОЙДЕННОГО ТОЧКОЙ

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью  за промежуток времени от  до  вычисляется по формуле .

*Примеры:*

1. Скорость движения точки  м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

*Решение: согласно условию, . Следовательно, *

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  м/с, второе — со скоростью v = *(4t+5)*м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

*Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:*



3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью и = (39,2—9,8^) м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

*Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда v = 0, т.е. 39,2*—*9,8t = 0, откуда I*= *4 с. По формуле (1) на ходим*



### 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ СИЛЫ

Работа, произведенная переменной силой f(х) при перемещении по оси *Ох*материальной точки от х = *а*до *х=b,*находится по формуле При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Г у к а: *F=kx, (3)*где F— сила Н; *х*—абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой *F*, а *k*—коэффициент пропорциональности, Н/м.

*Пример:*

1. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,22 до 0,32 м?

*Решение: используя равенство (3), имеем 50=0,01k, т. е. kК = 5000 Н/м. Находим пределы интегрирования: а = 0,22*— *0,2 = 0,02 (м), b=0,32*— *0,2 = 0,12(м). Теперь по формуле (2) получим*



### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ, ПРОИЗВОДИМОЙ ПРИ ПОДНЯТИИ ГРУЗА

Задача. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

*Решение: выделим на глубине х горизонтальный слой высотой dх (*[***рис.***](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril11.docx)*). Работа А, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом Р на высоту х, равна Рх.*

*Изменение глубины х на малую величину dх вызовет изменение объема V на величину dV*= *пr2 dх и изменение веса Р на величину \* dР = 9807 r2 dх; при этом совершаемая работа А изменится на величину dА=9807пr2 хdх. Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до Н, получим*



### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Значение силы *Р*давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения *х*этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (Н) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле *Р =9807**S x,*

где — плотность жидкости, кг/м3; S — площадь площадки, м2; *х -*глубина погружения площадки, м.

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения *Р (х).*

### 5. ДЛИНА ДУГИ

Пусть плоская кривая *АВ*([**рис. )**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril12.docx) задана уравнением *у =f(x) (a**x**b),*причем *f(x)*и *f ?(x)* — непрерывные функции в промежутке [а,b]. Тогда дифференциал *dl*длины дуги *АВ*выражается формулойили , а длина дуги *АВ*вычисляется по формуле (4)

где а и b—значения независимой переменной *х*в точках А и В. Если кривая задана уравнением *х =**(у)(с у**d),*то длина дуги АВ вычисляется по формуле  (5) где *с*и *д*значения независимой переменной *у*в точках *А*и В.

### 6. ЦЕНТР МАСС

При нахождении центра масс пользуются следующими правилами:

1) Координата х*?* центра масс системы материальных точек А1, А2,..., Аn с массами m1, m2, ..., mn, расположенных на прямой в точках с координатами х1, х2, ..., хn, находятся по формуле

*(\*);*2) При вычислении координаты центра масс можно любую часть фигуры заменить на материальную точку, поместив ее в центр масс этой части, и приписать ей массу, равную массе рассматриваемой части фигуры. Пример. Пусть вдоль стержня-отрезка [а;b] оси Ох - распределена масса плотностью  (х), где  (х) - непрерывная функция. Покажем, чтоа) суммарная масса М стержня равна ; б) координата центра масс х*'*равна .

Разобьем отрезок [а; b] на n равных частей точками а= х0< х1< х2< ... <хn= b ([**рис.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril13.docx) ). На каждом из n этих отрезков плотность можно считать при больших n постоянно и примерно равной  (хk - 1) на k-м отрезке (в силу непрерывности (х). Тогда масса k-ого отрезка примерно равна а масса всего стержня равна 

Считая каждый из n маленьких отрезков материальной точкой массы mk , помещенной в точке  , получим по формуле (\*), что координата центра масс приближенно находится так



Теперь осталось заметить, что при n —>  числитель стремится к интегралу , а знаменатель (выражающий массу всего стержня) - к интегралу 

Для нахождения координат центра масс системы материальных точек на плоскости или в пространстве также пользуются формулой(\*)

Учитель: У вас на столах таблица и задачи, используя таблицу найдите: а) количество электричества; б) массу стержня по его плотности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Величины | Вычисление производной | Вычисление интеграла |
| *А* – работа;*F* – сила;*N* - мощность. | *F(x)=A' (x);**N(t)=A' (t).* | A=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image348.gif;A=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image349.gif |
| m –масса тонкого стержняp – линейная плотность | P(x)=m' (x). | m=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image350.gif |
| Q –электрический заряд;I – сила тока. | I(t)=q' (t) | Q=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image351.gif |
| *S* –перемещение;*v –*скорость. | V(t)=S' (t) | S=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image352.gif |
| *Q* –количество теплоты;*с* – теплоёмкость. | C(t)=Q' (t) | Q=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image353.gif |

Физические приложения интеграла

1. Реши задачи.

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Вычислите массу участка стержня от*https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image354.gif*, если его линейная плотность задается формулой https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image355.gif
 | 1. Вычислите работу за промежуток времени [4;9 ], если мощность вычисляется по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image356.gif/
 |
| * Вычислите количество электричества, протекшего по проводнику за промежуток времени [ 2;3 ], если сила тока задается формулой https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image357.gif
 | 1. Вычислите работу по переносу единичной массы, совершенную силой https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image358.gif [ -1;2].
 |

**Итог урока:** Завершили тему “Интеграл”, научились вычислять первообразные, интегралы, площади фигур, рассмотрели применение интеграла на практике, данные задачи могут встретиться на ЕГЭ, думаю, с ними вы справитесь.

 **Конспект урока**

**Вычисление площадей с помощью интегралов.**

**Перечень вопросов, рассматриваемых в теме**

1) Нахождение площади фигуры, ограниченной графиками функций с помощью определенного интеграла.

2) Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью формулы Ньютона – Лейбница

3) Решение задач, с помощью формулы Ньютона – Лейбница



Формула Ньютона – Лейбниц

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [а;b] знака функции f(х), прямыми х=а, x=b и отрезком [а;b].

Отрезок **[a;b**] называют **основанием** этой криволинейной трапеции





формула Ньютона – Лейбница

Если в задаче требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, то ответ всегда будет положительный. Если требуется, используя чертеж, вычислить интеграл, то его значение может быть любым. ( зависит от расположения криволинейной трапеции)



**Контрольные задания**

**№1** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями y= x, y = 5 – x, x = 1, x = 2, используя определенный интеграл.

Решение. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.



Сначала находим первообразную функцию  F(x) . Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: F(b).

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: F(а) .

Рассчитываем разность F(b)  - F(а)    , это и будет ответ





**№2.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями у=4-х2,у=3х, у=0 и находящейся в 1-й четверти.

Решение: Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.



Сначала находим первообразную функцию  F(x) . Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: F(b)  .

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: F(а) .

Рассчитываем разность F(b)  - F(а)    , это и будет ответ.



Решение. S=SOAB +SABC







**№3.** Найти площадь криволинейной трапеции (х-1)2, ограниченной линиями х=2 и х=1, осью 0х

Решение:

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.



Сначала находим первообразную функцию  F(x) . Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: F(b)  .

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: F(а) .

Рассчитываем разность F(b)  - F(а), это и будет ответ.



Д/З№1016(1,2)

Преподаватель: Чупанова М.У.