Дата: **26.01.2021**

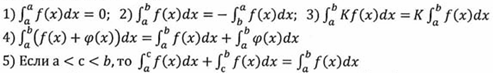
Группа: **20-ПСО-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Применение интеграла**

Мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах является определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа. Геометрический смысл интеграла – площадь криволинейной трапеции. Физический смысл интеграла – 1) масса неоднородного стержня с плотностью, 2) перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью за промежуток времени.

Свойства интеграла



Применение интеграла

|  |  |
| --- | --- |
| *img2.gif (4948 bytes) при https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image307.gif .* | |
| ***Математика***   1. Вычисления Sфигур. 2. Длина дуги кривой. 3. Vтела на S параллельных сечений. 4. V тела вращения и т.д. | ***Физика***   1. Работа *А* переменной силы. 2. S – (путь) перемещения. 3. Вычисление массы. 4. Вычисление момента инерции линии, круга, цилиндра. 5. Вычисление координаты центра тяжести. 6. Количество теплоты и т.д. |

Рассматриваем применение интеграла в математике для вычисления площади фигур.

а) Площадь всякой плоской фигуры, рассматриваемая в прямоугольной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилежащих к оси *Ох* и оси *Оу.* Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *у = f(х),* осью *Ох* и двумя прямыми *х=а* и *х=b,* где *а https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image308.gif х https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image308.gif b*, *f(х) https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image309.gif 0* вычисляется по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image310.gif Если криволинейная трапеция прилегает к оси *Оу*, то её площадь вычисляется по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/img3.gif, При вычислении площадей фигур могут представиться следующие случаи: а)Фигура расположена над осью Ох и ограничена осью Ох, кривой у=f(х) и двумя прямыми х=а и х=b. Площадь этой фигуры находится по формуле 1 или 2.

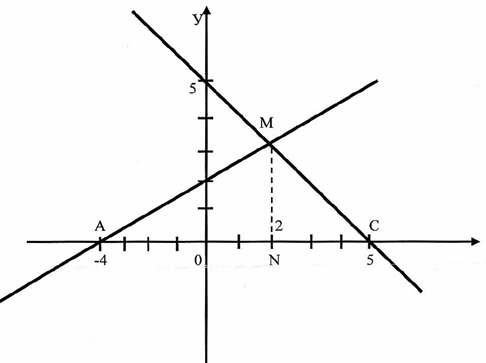
б) Фигура расположена под осью Ох и ограничена осью Ох, кривой у=f(х) и двумя прямыми х=а и х=b Площадь находится по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image312.gif.

в) Фигура расположена над и под осью Ох и ограничена осью Ох, кривой у=f(х) и двумя прямыми х=а и х=b

г) Площадь ограничена двумя пересекающимися кривыми у=f(х) и у = https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image313.gif(х)

Решим задачу

*х-2у+4=0 и х+у-5+0 и у=0*



https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image314.gif https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image315.gif

[**Вычисление объемов тел.**](https://urok.1sept.ru/articles/511391/pril2.docx)

Интеграл, широко применяющийся в физике. Слово физикам.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПУТИ, ПРОЙДЕННОГО ТОЧКОЙ

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image316.gif за промежуток времени от https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image317.gif до https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image318.gif вычисляется по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image319.gif.

*Примеры:*

1. Скорость движения точки https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image320.gif м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

*Решение: согласно условию, https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image321.gif. Следовательно, https://urok.1sept.ru/articles/511391/img5.gif*

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image323.gif м/с, второе — со скоростью v = *(4t+5)*м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

*Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:*

https://urok.1sept.ru/articles/511391/img6.gif

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью и = (39,2—9,8^) м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

*Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда v = 0, т.е. 39,2*—*9,8t = 0, откуда I*= *4 с. По формуле (1) на ходим*

https://urok.1sept.ru/articles/511391/img7.gif

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ СИЛЫ

Работа, произведенная переменной силой f(х) при перемещении по оси *Ох*материальной точки от х = *а*до *х=b,*находится по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image325.gifПри решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Г у к а: *F=kx, (3)*где F— сила Н; *х*—абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой *F*, а *k*—коэффициент пропорциональности, Н/м.

*Пример:*

1. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,22 до 0,32 м?

*Решение: используя равенство (3), имеем 50=0,01k, т. е. kК = 5000 Н/м. Находим пределы интегрирования: а = 0,22*— *0,2 = 0,02 (м), b=0,32*— *0,2 = 0,12(м). Теперь по формуле (2) получим*

https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image326.gif

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ, ПРОИЗВОДИМОЙ ПРИ ПОДНЯТИИ ГРУЗА

Задача. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

*Решение: выделим на глубине х горизонтальный слой высотой dх*

*Работа А, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом Р на высоту х, равна Рх.*

*Изменение глубины х на малую величину dх вызовет изменение объема V на величину dV*= *пr2 dх и изменение веса Р на величину \* dР = 9807 r2 dх; при этом совершаемая работа А изменится на величину dА=9807пr2 хdх. Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до Н, получим*

https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image327.gif

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Значение силы *Р*давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения *х*этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (Н) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле *Р =9807*https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image328.gif*S x,*

где https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image329.gif— плотность жидкости, кг/м3; S — площадь площадки, м2; *х -*глубина погружения площадки, м.

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения *Р (х).*

5. ДЛИНА ДУГИ

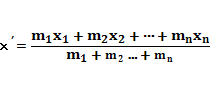
Пусть плоская кривая *АВ* задана уравнением *у =f(x) (a*https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image332.gif*x*https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image333.gif*b),*причем *f(x)*и *f ?(x)* — непрерывные функции в промежутке [а,b]. Тогда дифференциал *dl*длины дуги *АВ*выражается формулойhttps://urok.1sept.ru/articles/511391/Image334.gifили https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image335.gif, а длина дуги *АВ*вычисляется по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image336.gif(4)

где а и b—значения независимой переменной *х*в точках А и В. Если кривая задана уравнением *х =*https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image337.gif*(у)(с у*https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image333.gif*d),*то длина дуги АВ вычисляется по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/img8.gif (5) где *с*и *д*значения независимой переменной *у*в точках *А*и В.

6. ЦЕНТР МАСС

При нахождении центра масс пользуются следующими правилами:

1) Координата х*?* центра масс системы материальных точек А1, А2,..., Аn с массами m1, m2, ..., mn, расположенных на прямой в точках с координатами х1, х2, ..., хn, находятся по формуле

*(\*);*2) При вычислении координаты центра масс можно любую часть фигуры заменить на материальную точку, поместив ее в центр масс этой части, и приписать ей массу, равную массе рассматриваемой части фигуры. Пример. Пусть вдоль стержня-отрезка [а;b] оси Ох - распределена масса плотностью https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image340.gif (х), где https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image340.gif (х) - непрерывная функция. Покажем, чтоа) суммарная масса М стержня равна https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image341.gif; б) координата центра масс х*'*равна https://urok.1sept.ru/articles/511391/img9.gif.

Разобьем отрезок [а; b] на n равных частей точками а= х0< х1< х2< ... <хn= b На каждом из n этих отрезков плотность можно считать при больших n постоянно и примерно равной https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image340.gif (хk - 1) на k-м отрезке (в силу непрерывности https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image340.gif(х). Тогда масса k-ого отрезка примерно равна https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image343.gifа масса всего стержня равна https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image344.gif

Считая каждый из n маленьких отрезков материальной точкой массы mk , помещенной в точке https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image345.gif , получим по формуле (\*), что координата центра масс приближенно находится так

https://urok.1sept.ru/articles/511391/img10.gif

Теперь осталось заметить, что при n —> https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image346.gif числитель стремится к интегралу https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image347.gif, а знаменатель (выражающий массу всего стержня) - к интегралу https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image341.gif

Для нахождения координат центра масс системы материальных точек на плоскости или в пространстве также пользуются формулой(\*)

найдите: а) количество электричества; б) массу стержня по его плотности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Величины | Вычисление производной | Вычисление интеграла |
| *А* – работа;  *F* – сила;  *N* - мощность. | *F(x)=A' (x);*  *N(t)=A' (t).* | A=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image348.gif;  A=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image349.gif |
| m –масса тонкого стержня  p – линейная плотность | P(x)=m' (x). | m=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image350.gif |
| Q –электрический заряд;  I – сила тока. | I(t)=q' (t) | Q=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image351.gif |
| *S* –перемещение;  *v –*скорость. | V(t)=S' (t) | S=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image352.gif |
| *Q* –количество теплоты;  *с* – теплоёмкость. | C(t)=Q' (t) | Q=https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image353.gif |

**Домашнее задание**

1. Реши задачи.

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Вычислите массу участка стержня от*https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image354.gif*, если его линейная плотность задается формулой https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image355.gif | 1. Вычислите работу за промежуток времени [4;9 ], если мощность вычисляется по формуле https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image356.gif/ |
| * Вычислите количество электричества, протекшего по проводнику за промежуток времени [ 2;3 ], если сила тока задается формулой https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image357.gif | 1. Вычислите работу по переносу единичной массы, совершенную силой https://urok.1sept.ru/articles/511391/Image358.gif [ -1;2]. |

Преподаватель Науразова Л.А