Дата: **11.12.2020**

Группа: **20-ПСО-1д**

Наименование дисциплины: **Математика**

Тема: **Производная**

**Историческая справка.**

Понятие «производная» возникло в XVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики.

Великий французский математик Пьер Ферма в 1629 г. Научился находить касательные к алгебраическим прямым.

В 1638г Ферма поделился этим открытием со своим земляком Рене Декартом, который тоже занимался этой проблемой и нашел свой метод построения касательных к алгебраическим кривым.

Ферма далеко продвинулся в применении дифференциальных методов. Он использовал их не только для проведения касательных, но, к примеру, для нахождения максимумов, вычисления площадей.

Однако ни Ферма, ни Декарт не сумели свести полученные научные выводы и результаты в единую систему. Тем не менее, выдвинутые идеи не пропали впустую. Многие из них легли в основу нового метода математического анализа – дифференциального исчисления.

«Дифференциальное исчисление – это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки и техники».

Основоположниками этого метода считаются Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716) и Исаак Ньютон (1642 – 1727).

Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц разработали аппарат, которым мы и пользуемся в настоящее время.

И. Ньютон в основном опирался на физическое представление о мгновенной скорости движения, а Г. Лейбниц использовал понятие бесконечно малой.

С помощью дифференциального исчисления был решен целый ряд задач теоретической механики, физики и астрономии. В частности, ученые предсказали возвращение кометы Галлея, что было большим триумфом науки XVII века.

Очень многие великие ученые внесли свой вклад в зарождение и развитие дифференциального исчисления. Среди них – Джеймс Грегори, Якоб Бернулли, Гийом Франсуа Лопиталь, Леонард Эйлер, Карл Фридрих Гаусс, Жозеф Луи Лагранж, который в 1797 г. ввел термин «производная» и современные обозначения y´, f´.

В настоящее время понятие производной находит большое применение в логистике и коммерческой деятельности. Умение применять производную к исследованию функции – важный элемент математической культуры.

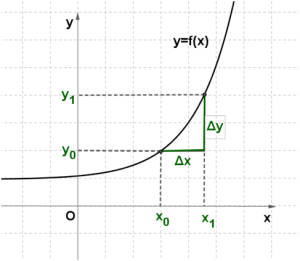
Пусть функция y=f(x) определена в точках x0 и x1. Разность x1−x0 называют **приращением аргумента**(при переходе от точки x0 к точке x1), а разность f(x1)-f(x0) называют **приращением функции**.

**Определение.**Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/ba0ca863-1301-4dbb-b8bd-bf84783a8d43.png

Изучая поведение функции y=f(x) около конкретной точки x0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Пусть функция y=f(x) определена в точках x0 и x1. Разность x1−x0 называют **приращением аргумента**(при переходе от точки x0 к точке x1), а разность f(x1)-f(x0) называют **приращением функции**.



Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита "дельта"; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, x1-x0=Δx, значит, x1=x0+Δx.

f(x1)-f(x0)=Δy, значит,

**Δy=f(x0+Δx)-f(x0). (1)**

*Нельзя истолковывать термин "приращение" как "прирост".*

**Примеры и разбор решения заданий**

**Пример 1.**

Найдем приращение Δx и Δf в точке x0,если f(x)= x2, x0=2 и х=1,9

Решение:

Δx= x1−x0=1,9-2=-0,1

Δf= f(1,9) –f(2)=1,92-22=-0,39

Ответ: Δx=-0,1; Δf =-0,39

**Пример 2.**

Найдем приращение Δx и Δf в точке x0,если f(x)= x2, x0=2 и х=2,1

Решение:

Δx= x1−x0=2,1-2=0,1

Δf= f(1,9) –f(2)=2,12-22=0,41

Ответ: Δx=0,1; Δf =0,41

**Пример 3.**

Найдем приращение Δf функции https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/9eb6609e-a32a-43b9-b835-1b298f3fc29e.png в точке x0,если приращение аргумента равно x0.

**Решение:**

по формуле (1) находим:

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/8e58e60e-39bd-401f-a84d-9876402d470a.png.

Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/50acb4a3-8339-4a2f-9783-08b443edabb3.png.

С помощью введенных обозначений приращений удобно также выражать среднюю скорость движения за промежуток времени [t0; t0+∆t]. Если точка движется по прямой и известна ее координата x(t), то

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/8f40c2e4-1cc1-4b53-b0d4-84eebc4f1bdb.png

*Эта формула верна и для ∆t<0 (для промежутка [t0+∆t; t0]).*

Аналогично выражение https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/900fc1f0-d8ef-4bd4-b98e-2fb224a42a77.png называют средней скорость изменения функции на промежутке с концами х0 и х0+∆х.

**Определение.**Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/6068eca4-9b07-44a7-b838-037e87a394ab.png

Обозначение: y’ или f’(x)

Если функция f(x) имеет производную в точке х, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция f(x) имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта функция дифференцируема на этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

**Схема вычисления производной функции**

1. Найти приращение функции на отрезке [x; x+Δx]:

∆y=y(x+∆x)-y(x)

1. Разделить приращение функции на приращение аргумента:

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/5372d0a9-28f1-4a14-a292-b500aa4715cf.png

1. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/ab01b46e-dc32-437c-9140-aba669097efc.png

**Пример 4.**

Вычислить производную функции y=x2

Решение: Используем схему вычисления производной по действиям:

1. ∆y=y(x+∆x)-y(x)= (х+∆х)²-х²= х²+2х·∆х+ ∆х²-х²= 2х·∆х+ ∆х²
2. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/c38f8711-2bb5-43d7-97c1-dc8913504c34.png
3. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/74932419-a259-4bbe-9836-bf574548cae4.png

Ответ: y’=2x.

Физический смысл производной: если положение точки при её движении задаётся функцией пути S(t), где t – время движения, то производная функции S есть мгновенная скорость движения в момент времени t: v(t)=S’(t).

Таким образом, скорость – есть производная от пути по времени.

**Пример 5.**

Точка движется по закону s(t)=1-2t. Найдите среднюю скорость движения за промежуток времени от t=0,8 до t=1.

Решение:

найдем ∆t= 1-0,8=0,2

S(0,8)= 1-2·0,8= -0,6=S(t)

S(1)= 1-2·1= -1=S(t+∆t)

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/0e221375-1c73-4a13-923e-7319161ce0df.png.

Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/015c9d61-e941-44e6-bebd-3c697a6d781e.png.

*Необходимое и достаточное условие дифференцируемости*

**Теорема 1.** Для того, чтобы функция *f*(*x*) была дифференцируема в точке *x*0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела конечную производную. **Следствие.** Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

**Замечание.** Дифференциалом dx независимой переменной будем считать приращение Δx, т.е. dx ≡ Δx.

Операция вычисления производной называется дифференцированием.

**Закрепление изученного материала.**

№ 776 (2): S(t) = 1 + 3t, от t = 0,8 до t = 1.

h = 1 – 0,8 = 0,2; vср. = = = 3.

№ 780 (2, 4), № 781 (2, 4), № 778 (самостоятельно)

**Контрольные вопросы**

1. Как называется раздел математики, который мы начали изучать?

2. Как найти скорость, зная расстояние и время?

3. Какую скорость мы получим?

4. Какую скорость мы видим на спидометре?

5. Где ещё можно увидеть значение мгновенной скорости?

6. Чем является мгновенная скорость для пути?

7. Как обозначается производная?

8. Что означает lim?

9. Что означает Δx; Δf?

10. Определение производной.

11. Как называется операция вычисления производной?

12. Где применяется понятие производной?

Чтобы проконтролировать себя, запишите в тетради все опорные слова, старые и новые, которые использовались нами в течение урока.

Проверка в виде самоконтроля:

**Домашнее задание:** §44, № 780 (1, 3), № 781 (1, 3), № 776(1).

Преподаватель Науразова Л.А